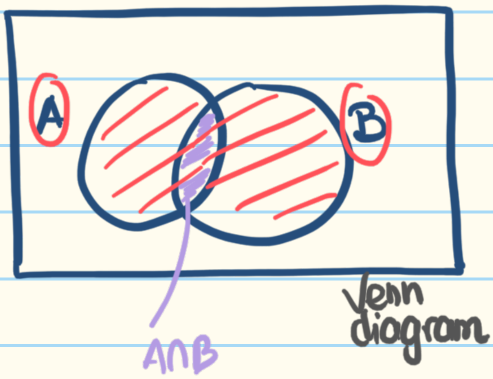
Operações com conjuntos



Ω

A, B subconjuntos de Ω

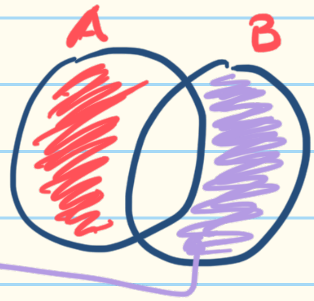
$A \cup B$ é o conjunto de elementos que estão em A ou em B.

$A \cap B$ é o conjunto de elementos que estão em A e em B.

$A \subseteq \Omega$, o complementar é $\Omega \setminus A$ e representamos por A^c.

O conjunto

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Nota que $A \Delta B = B \Delta A$.

Identidades úteis:

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (prop distributiva)
4. $A \cup \phi = A$ e $A \cap \phi = \phi$
5. se $A \subseteq \Omega$ então $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$
6. se $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ então $\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$
   $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$
7. $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$
   $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$

Há uma semelhança entre as relações satisfeitas por $\cap, \cup$ com as relações de $\times$ e $+$.

Limsup e Liminf de conjuntos

Seja $E_1, E_2, \dots$ uma sequência de conjuntos.

$$\limsup E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$$

$$\liminf E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i$$

e se $\limsup E_i = \liminf E_i$ então dizemos que a sequência converge a esse limite.

obs
$\limsup E_i$ é o conjunto cujos elementos estão em E_i para ∞ valores de i

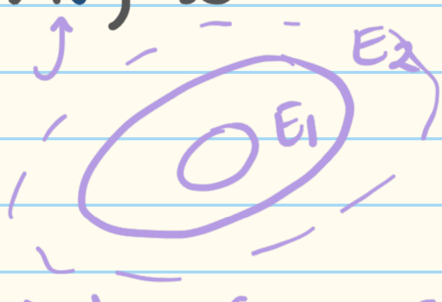
obs
$\liminf E_i$ é o conjunto cujos elementos estão em todos os E_i's excepto num nº finito deles.

Sequências crescentes e decrescentes

$\{E_i\}_i$ diz-se crescente / decrescente ($E_i \uparrow\downarrow$) se

$\forall n \quad E_n \subseteq E_{n+1}$

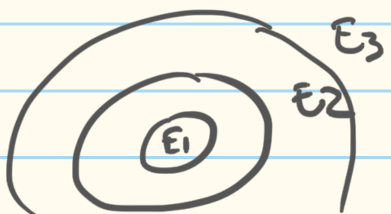
$\qquad E_n \supseteq E_{n+1}$



Uma sequência monótona de conjuntos é uma sequência crescente ou decrescente.

obs: Toda a sequência monótona converge para um limite.

1) $E_i \uparrow$ então $\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$



Por outro lado $\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i = E_n \quad \forall n$

logo $\limsup E_i = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

e $\liminf E_i = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i = \bigcup_{n\geq 1} E_n$

$$\therefore \liminf E_i = \limsup E_i$$

2) faça para sequências decrescentes.

Função indicadora

Dado um conjunto $E \subseteq \Omega$, a função χ_E ou $\mathbb{1}_E$

$$\chi_E \, (\mathbb{1}_E) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{define-se por}$$

$$x \longrightarrow \begin{cases} 1, \text{ se } x \in E \\ 0, \text{ se } x \notin E. \end{cases}$$

é chamada função indicadora (ou característica). Mas característica é o que se chama em Teoria da probabilidade de Transformada de Fourier-Stieltjes.

obs $\quad E = \{ x : \mathbb{1}_E(x) = 1 \}$

O objetivo do nosso curso consiste em analisar dois tópicos

Medida

1. Definir classes de conjuntos

semi-anel   semi-álgebra   álgebra   σ-álgebra

e definir funções nesses conjuntos

2. Explorar a chamada medida de Lebesgue que está relacionada com a noção de comprimento, área, volume, etc.

&

Integração

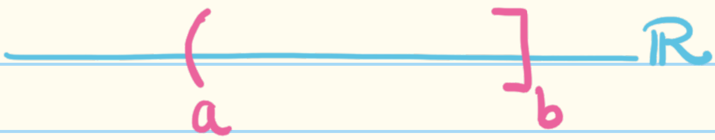
3. Integrar funções com respeito a essas medidas
4. Analisar diferentes tipos de convergência em espaços de funções
5. Teoremas de diferenciação de medidas
6. Probabilidade

1º teste a 12 de Abril

2º teste a 29 de Junho

Antes de passarmos à definição abstrata de medida vamos ver o seguinte exemplo.

Considere a reta real $\mathbb{R}$. $\Omega = \mathbb{R}$



Para cada intervalo da forma $(a,b]$ definimos uma função

$$\lambda(a,b] = b-a \text{ (comprimento do intervalo)}$$

e vamos querer estender esta função a todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, ie

$$\lambda : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
$$A \longrightarrow \lambda(A)$$

e vamos querer que esta função tenha certas propriedades.

Esperamos que:

(A) λ esteja definida em $\mathcal{P}(\Omega)$ ie em todos os subconjuntos de Ω

(B) $\lambda((a,b]) = b-a$

(C) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ definimos a sua translação por x como o conjunto

$$A+x = \{z+x : z \in A\}$$

e vamos pedir que

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ se tem $\lambda(A) = \lambda(A+x)$.

(D) Se $A = \sum_{j \geq 1} A_j$ então $\lambda(A) = \sum_{j \geq 1} \lambda(A_j)$

Mais tarde vamos chamar a esta propriedade de σ-aditividade.

União disjunta ie $A_i \cap A_j = \phi$ se $i \neq j$

Vamos procurar por uma função que tenha estas 4 propriedades, e vamos ver que é impossível. Não existe tal λ e vamos ter de relaxar alguma condição.

Para tal vamos supôr que existe λ a satisfazer as propriedades (A), (B), (C) e (D) e vamos chegar a um absurdo.

Vamos introduzir em $\mathbb{R}$ a seguinte relação de equivalência:

reflexiva $a \sim a$
simétrica $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
transitiva $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Q}$
$x, y \in \mathbb{R}$

Vamos representar as classes de equivalência por C_x, ie

$$C_x = \{ y \in \mathbb{R} : y - x \in \mathbb{Q} \} = \{ y \in \mathbb{R} : y \sim x \}$$

Seja $\boxed{I = \mathbb{R}|_\sim}$ o conjunto das classes de equivalência.

Se α é um elemento de I então α representa a classe de equivalência A_α de α ou seja $A_\alpha := \{\alpha + q : q \in \mathbb{Q}\}$.

obs: se $x, y \in \mathbb{R}$ então há duas possibilidades:

1) $A_x = A_y$ ou 2) $A_x \cap A_y = \phi$.

Provemos a observação. Suponhamos que $A_x \cap A_y \neq \phi$. Vamos provar 1). Ora se $A_x \cap A_y \neq \phi$ seja $a \in A_x \cap A_y$. Logo $a = x + p$ onde $p \in \mathbb{Q}$

$a = y + q$ onde $q \in \mathbb{Q}$

$$\therefore \quad x + p = y + q$$

e portanto $x - y = q - p \in \mathbb{Q}$

$\therefore x \sim y$ e x e y estão na mesma classe de equivalência i.e. $A_x = A_y$ e vale 1).

Ora $I = \mathbb{R}/\sim$ é não numerável pois podemos representar qualquer elemento de $\mathbb{R}$ como um elemento de I e um elemento da classe de equivalência (que é numerável)

Agora vamos usar o axioma da escolha para, a partir de I, construir um novo conjunto.

Axioma da escolha:

Dada uma classe não vazia $\mathcal{C}$ de conjuntos disjuntos não vazios E_α, existe um conjunto $\mathcal{Y} \subseteq \cup\{E_\alpha ; E_\alpha \in \mathcal{C}\}$ tal que

$\mathcal{Y} \cap E_\alpha$ é um conjunto singular para cada

Exe 4.

Usando o axioma da escolha, podemos em cada uma dessas classes de equivalência escolher um elemento e vamos escolher esse elemento estando no conjunto $[0,1)$. Seja E o conjunto formado por esses elementos.

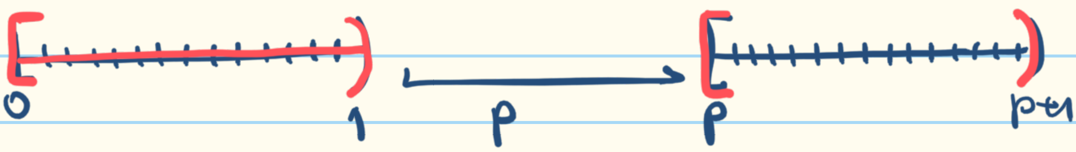
Então $E \subseteq [0,1)$.

• Observe que tal é possível pois os elementos de I são classes de equivalência ou seja são n°s da forma $x+q$ com $q \in \mathbb{Q}$ e se escolhermos $q = -\lfloor x \rfloor$ então o representante dessa classe que estamos a selecionar e colocar em E já está no intervalo $[0,1)$.

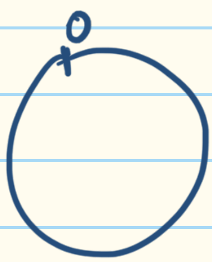
Seja $p \in [0,1) \cap \mathbb{Q} = \tilde{\mathbb{Q}}$.

Seja $E+p = \{ x+p : x \in E \}$ a translação de E por p.

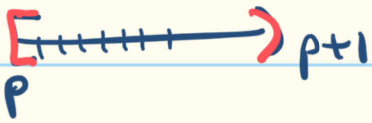
Observe que $E \subseteq [0,1)$, logo $E+p \subseteq [p, p+1)$.

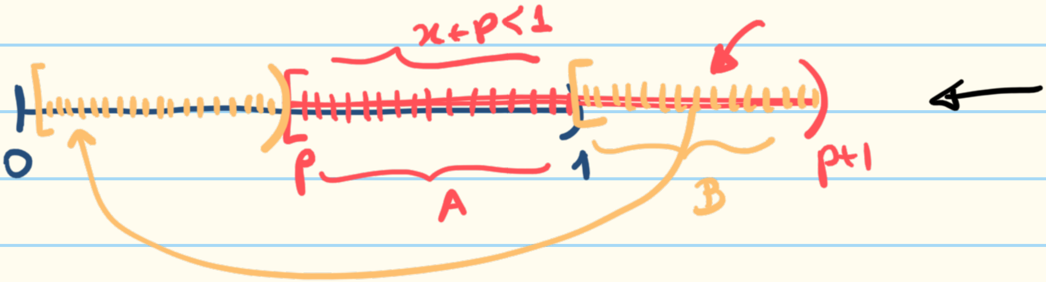


Vamos pensar no intervalo $[0,1)$ como sendo S = toro unidimensional



ou então podemos pensar no seguinte:

• os pontos de  que estão no intervalo $[0,1)$ mantêm-se, mas os restantes transladamos de modo a ficarem em $[0,1)$.



Ou seja $E+p \subseteq [p,p+1)$ vai ser enviado no conjunto $E_p \subseteq [0,1)$ que é dado por:

$$E_p = \begin{cases} x+p & \text{se } x+p<1 \\ x+p-1 & \text{se } x+p \geq 1 \end{cases}$$

Agora note que

$$\lambda(E) = \lambda(E_p)$$

Observa que como $E+p$ é apenas uma translação de E, temos

$$\lambda(E) = \lambda(E+p)$$

Por outro lado:

temos $\lambda(E+p) = \lambda(A) + \lambda(\hat{B})$ pois λ é aditiva.

Mas $B = \hat{B} - 1$, logo

$$\boxed{\lambda(B) = \lambda(\hat{B})}$$

Mas $E_p = A \cup B$ logo $\lambda(E_p) = \lambda(B) + \lambda(A)$

$$= \lambda(\hat{B}) + \lambda(A)$$

$$= \lambda(E+p)$$

Juntando tudo temos que $\lambda(E) = \lambda(E_p)$ ✓

Temos agora um conjunto

E_p tal que $\lambda(E_p) = \lambda(E)$.

Vamos provar agora que: E_p's são disjuntos, ie

$E_p \cap E_q = \phi$ (não esqueça que $p, q \in \tilde{\mathbb{Q}}$).

E depois vamos ver que $\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_p = [0,1)$.

1. Seja $\alpha \in E_p \cap E_q$. Queremos ver que ou $p = q$ ou vamos ter um absurdo.

$\alpha \in E_p$ então $\alpha = x + p$ com $x + p < 1$, $x \in E$ (depois vemos o outro caso)

$\alpha \in E_q$ então $\alpha = y + q$ com $y + q < 1$, $y \in E$ (depois vemos o outro caso)

$\therefore \; x + p = y + q$

$\therefore \; y = x + (p - q)$

Mas lembremos agora que por definição se tem $y \sim x$, mas os elementos de E_p foram escolhidos de tal modo que só temos um elemento de cada classe:

$\therefore \; y = x$ e então $p = q$. ✓

Com isto provamos que $E_p \cap E_q = \emptyset$, se $p \neq q$.

obs:

Repara que se $\alpha = x+p$ com $\underset{x \in E}{x+p<1}$ e

$\alpha = y+q-1$ com $\underset{y \in E}{y+q \geq 1}$

então novamente temos $x+p = y+q-1$

$$\therefore \quad y-x = p-q+1 \in \mathbb{Q}$$

Mas como só temos um elemento na classe temos $y=x$ e portanto $p-q+1=0 \Leftrightarrow p=q-1$ impossível pois $p,q \in \mathbb{Q}$.

2

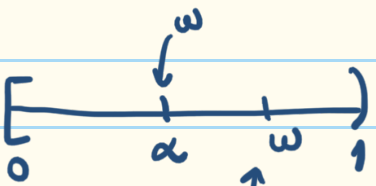
Falta agora mostrarmos que $\boxed{\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_p = [0,1)}$.

Basta ver que

$$[0,1) \subseteq \bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_p$$

Seja $\omega \in [0,1)$. Sabemos que E é o conjunto das classes de equivalência, logo $\exists\, \alpha \in E$ tal que $\alpha \sim \omega$.

$\boxed{1.}$ se $\alpha = \omega$ então $\left.\begin{array}{l}\omega \in E \\ \text{e para } p=0\end{array}\right\} \omega \in E_0$



$$\therefore \omega \in \bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_p \quad ✓$$

$\boxed{2.}$ se $\alpha < \omega$

Ora $\alpha \sim \omega$ e portanto $\exists\, p \in \mathbb{Q}$ tq $\omega - \alpha = p$

Observa que: . $w < 1$ logo $p < 1$
. $w > \alpha$ logo $p > 0$

$$\therefore \quad w - \alpha = p \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$$

e $w = \alpha + p < 1$

$\therefore w \in E_p$ porque os elementos de E_p podem ser escritos como $\alpha + p$ quando $\alpha + p < 1$.

$$\therefore \quad w \in \bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_p \quad \checkmark$$

$\boxed{3.}$ Se $w < \alpha$

ora $w \sim \alpha$ logo $\alpha - w \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ (isto resulta do facto de que $w \sim \alpha$ logo a diferença está em $\mathbb{Q}$ mas está também em $[0,1)$ pelos mesmos motivos que invocamos no ponto $\boxed{2.}$ ie $\alpha < 1$ e $w > 0$

$q = \alpha - w$

$$\begin{aligned} w &= \alpha - q \\ &= \alpha + \underbrace{1 - q}_{\tilde{p}} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad w = \alpha + \tilde{p} - 1$$

ora $\alpha + \tilde{p} = \alpha + 1 - q = w + 1 \geq 1$ pois $w > 0$

Logo quando $w < \alpha$ escrevemos $w = \alpha + \tilde{p} - 1$ quando $\alpha + \tilde{p} \geq 1$.

$$\therefore \quad w \in E_{\tilde{p}} \quad \text{onde } \tilde{p} = 1 - q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$$

$$\therefore [0,1) \subseteq \bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_p.$$

são conjuntos 2 a 2 disjuntos

Observa que todos os conjuntos E_p têm a mesma medida, pois acima provamos que

$$\lambda(E_p) = \lambda(E)$$

Então se existisse λ a satisfazer as propriedades acima teríamos

$$\lambda([0,1)) = \lambda\Big(\sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_p\Big)$$

↳ disjuntos 2 a 2

$$\overset{(D)}{\underset{\sigma\text{-aditividade}}{=}} \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \underbrace{\lambda(E_p)}_{=\lambda(E)}$$

então 1. ou $\lambda(E) = 0$ e teríamos

$$\lambda([0,1)) \overset{(B)}{=} 1 = 0 \quad \text{Absurdo.}$$

2. ou $\lambda(E) \neq 0$ e teríamos

$$\lambda([0,1)) \overset{(B)}{=} 1 = +\infty \quad \text{Absurdo}$$

$\therefore$ Não existe tal medida λ. !

Não existe $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (A)

(B) $\mu(a,b] = b-a$

(C) $\mu(A+x) = \mu(A)$

(D) $\mu\left(\sum_{j\geq 1} A_j\right) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j)$

Nota que vamos ter de relaxar uma condição, vejamos qual.
Como queremos estender a noção de comprimento a condição (B) faz sentido, vamos mantê-la.
Também é natural pedirmos que a medida (ou "comprimento") do conjunto (ou "intervalo") transladado seja a mesma do conjunto inicial, então a condição (C) também é natural. A condição (D) também faz sentido já que se tomarmos intervalos disjuntos queremos que a medida da união seja a soma da medida das partes. Mantemos (D).
Assim a condição que temos alguma liberdade é (A) ie não vamos pedir que a medida esteja definida em todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$.
O que vamos fazer nas próximas aulas é ver em que tipos de classes de conjuntos é que vamos poder definir tais funções.

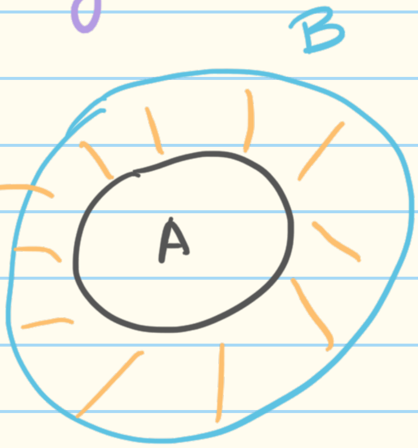
Vamos definir primeiro a medida em "peças" fundamentais (como os intervalos) e depois vamos estender a conjuntos mais gerais preservando as propriedades que queremos. Já vimos que no caso de λ acima, não vamos conseguir estender a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, mas vamos tentar estender o máximo possível.

Exercício p/ apresentarem.

Terminámos esta digressão com a seguinte observação
Se $A \subseteq B$ então $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

✓ Exercício p/ apresentarem. ↗ Monotonia de λ.

Terminámos esta digressão com a seguinte observação: se $A \subseteq B$ então $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.



Ora $B = \underbrace{A \cup (B \setminus A)}_{\text{união disjunta}}$

logo para usarmos a σ-aditividade tomamos

$$A_j = \begin{cases} A & j=1 \\ B\setminus A & j=2 \\ \phi & j \geq 3 \end{cases}$$

$\therefore\ B = \sum_{j\geq 1} A_j$ e $\lambda(B) = \sum_{j\geq 1} \lambda(A_j)$

$$= \lambda(A) + \lambda(B\setminus A) + \lambda(\phi)$$

Mas $\lambda(\phi) = 0$, donde resulta que

$$\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B\setminus A)$$

Logo:

1) se $\lambda(B\setminus A) = +\infty$ então $\lambda(B) = +\infty$ e portanto $\lambda(A) \leq \lambda(B) = +\infty$ vale.

2) se $\lambda(B\setminus A) < \infty$ então

$$\lambda(B) = \lambda(A) + \underbrace{\lambda(B\setminus A)}_{\geq 0} \geq \lambda(A) \ ✓$$

Para concluir isso, basta ver que $[0,1) = [0,1) \cup \phi \cup \ldots \phi \ldots$ e $\lambda([0,1)) = 1 = \lambda([0,1)) + \sum_{j\geq 1} \lambda(\phi)$ e se $\lambda(\phi) \neq 0$ teríamos um absurdo

Classes de conjuntos

Ω = conjunto

$\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega)$ classe de todos os subconjuntos de Ω.

Definição: Semi-anel (Ω: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty$, S^1)

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é um semi-anel se

1) $\emptyset \in \mathcal{S}$
2) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$
3) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists\, E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ tal que $A \setminus B = \sum_{j=1}^{n} E_j$

↳ união disjunta (2 a 2)

Exemplo: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{ (a,b] \,;\, \underset{a,b \in \mathbb{R}}{a \leq b} \}$ é um semi-anel.

(exercício)

Definição: Semi-álgebra

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é uma semi-álgebra se

1) $\Omega \in \mathcal{S}$
2) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$
3) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c = \sum_{j=1}^{n} E_j$, $E_j \in \mathcal{S}$

No exemplo acima $\mathcal{C}$ não é uma semi-álgebra. !

Observação:

Note que 3) na definição de semi-álgebra, pode ser obtido de 3) da definição de semi-anel, tomando $B = \Omega$.

Exemplo: $\mathcal{S} = \{ (a,b] ;\ a,b \in \mathbb{R}\ \ a \leq b,\ \mathbb{R},\ (-\infty, a],\ (b, +\infty),\ \phi \}$ $\Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra.

Analogamente, se tomamos $\mathbb{R}^2$ e considerarmos retângulos em vez de intervalos, também temos uma semi-álgebra.

Observação:

Se $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra então $\phi \in \mathcal{S}$! Isto é verdade porque por 1) $\Omega \in \mathcal{S}$ e por 3) $\Omega^c = \sum_{j=1}^{n} E_j$ com $E_j \in \mathcal{S}$.

Mas $\Omega^c = \phi = \sum_{j=1}^{n} E_j$.

Observação

Se $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ é um semi-anel.

Vamos verificar as propriedades de semi-anel.

1) $\phi \in \mathcal{S}$ (acabamos de provar)

2) igual ✓

3) temos de provar que se $A, B \in \mathcal{S}$ então $A \setminus B = \sum_{j=1}^{n} E_j$, $E_j \in \mathcal{S}$.

Ora, nota que $A \setminus B = A \cap B^c$. Logo

$$A \setminus B = A \cap B^c \quad \text{porque } B \in \mathcal{S}$$

$$= A \cap \left(\sum_{j=1}^{n} E_j \right) \quad \text{(e } B \text{ está na semi-algebra)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(A \cap E_j)}_{\text{conjuntos disjuntos e em } \mathcal{S} \text{ por 2)}}$$

$A \in \mathcal{S}$

$\Downarrow$

$$A^c = \sum_{j=1}^{n} E_j \ ; \ E_j \in \mathcal{S}$$

o mesmo vale para $B \in \mathcal{S}$.

Logo $A \setminus B = \sum_{j=1}^{n} (A \cap E_j)$ ✓

Observação:

Uma semi-álgebra não é fechada para a união, ie

$A, B \in \mathcal{S} \not\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$.

Basta ver para $\mathcal{C} = \{ \mathbb{R}, (a,b], (a,+\infty), (-\infty,b], \phi \}$ que forma uma semi-algebra, no entanto a união de dois conjuntos $(-\infty,b] \cup (a,+\infty)$ com $b<a$ não está em $\mathcal{C}$.

$\therefore \mathcal{C}$ não é fechada para a união.

<u>Objetivo</u> inicial do curso consiste em definir funções em classes de conjuntos que tenham certas propriedades razoáveis. Em mente vamos ter sempre a semi-álgebra dos intervalos em $\mathbb{R}$ e a medida que dá peso a um intervalo, o seu comprimento. Mais precisamente, vamos querer definir uma função que vamos denotar por μ

e $\mu(a,b] := b-a$

$\mu(a,+\infty) = +\infty$

$\mu(-\infty,b] = +\infty$

Desta forma temos μ definida na semi-álgebra $\mathcal{I}$ dos intervalos e vamos querer estender μ a uma classe maior e que seja fechada para a união. Lembre que já vimos que uma semi-álgebra não é fechada para a união. Ou seja, vamos querer estender μ primeiro para uniões finitas e disjuntas ie para conjuntos da forma $\sum_{j=1}^{n}(a_j,b_j]$.

Temos então a seguinte definição:

Definição Álgebra

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é uma álgebra se:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$ (fechado para a intersecção finita)

3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (fechado para o complementar)

fechado para uniões finitas

Observação: Toda a álgebra é uma semi-álgebra. Mas a algebra é fechada para a união. !

Isto porque se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ e $A^c, B^c \in \mathcal{A}$. Logo $A^c \cap B^c \in \mathcal{A}$ e portanto

$(A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$ ✓

Agora temos o seguinte resultado.

Afirmação: Se $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra, então

$$\mathcal{C} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} E_j \,,\ E_j \in \mathcal{S} \right\}$$

é uma álgebra.

1) $\Omega \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ porque $\Omega \in \mathcal{S}$ e $\Omega = \Omega$ ✓

2) $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ então $A \cap B \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$?

Como $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ então $A = \sum_{j=1}^{n} A_j$; $A_j \in \mathcal{S}$

Como $B \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ então $B = \sum_{k=1}^{m} B_k$; $B_k \in \mathcal{S}$.

Logo

$$A \cap B = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j \right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} B_k \right) = \sum_{j,k} \underbrace{(A_j \cap B_k)}_{\in \mathcal{S}}$$

porque $\mathcal{S}$ é fechado para a intersecção.

Como $A \cap B = \sum_{j,k} \underbrace{(A_j \cap B_k)}_{\in \mathcal{S}}$ então $A \cap B \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$.

3) $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$?

Ora, se $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ então $A = \sum_{j=1}^{n} E_j$, com $E_j \in \mathcal{S}$. Logo

$$A^c = \bigcap_{j=1}^{n} E_j^c \underset{\substack{\text{por 3) da} \\ \text{definição de} \\ \text{semi-algebra}}}{=} \bigcap_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m_j} F_{j,k} \right) = \sum_{k=1}^{m_1} \cdots \sum_{k=1}^{m_n} \underbrace{(F_{1,k} \cap \dots \cap F_{n,k})}_{\in \mathcal{S}}$$

$= E_1^c \cap \dots \cap E_n^c$

veja que $F_{1}\times \cap \ldots \cap F_{2k} \in \mathcal{S}$ porque $\mathcal{S}$ é semi-algebra e estes conjuntos são disjuntos dois a dois. Logo $A^c \in A(\mathcal{S})$.

$\{\checkmark\}$

Observação: Sejam $A_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\alpha \in I$ um conjunto arbitrário de índices. Para cada α, A_α é uma álgebra e $A_\alpha \supseteq \mathcal{S}$ onde $\mathcal{S}$ é uma semi-algebra.

Então $\bigcap_\alpha A_\alpha := \mathcal{A}$ é uma álgebra, e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$.

Def: Dado $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, a álgebra gerada por $\mathcal{C}$, é tal que $\mathcal{C} \subseteq A(\mathcal{C})$ e se $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{C}$ e é uma algebra então $\mathcal{B} \supseteq A(\mathcal{C})$.

Esta é a menor álgebra que contém $\mathcal{S}$ e vamos denotá-la por $A(\mathcal{S})$ e é a chamada álgebra gerada por $\mathcal{S}$.

Afirmação: A álgebra gerada por $\mathcal{S}$ é o conjunto que vimos antes ie $A(\mathcal{S}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} E_j,\ E_j \in \mathcal{S} \right\}$.

Isto é muito particular, ie o facto de termos uma representação exata para os elementos da álgebra gerada por uma semi-álgebra, ou seja os elementos da álgebra são uniões finitas disjuntas de elementos da semi-álgebra.

Lembre que sabemos que $\mathcal{S} = \{\mathbb{R}, (a,b], (a,+\infty), (-\infty,b], a,b \in \mathbb{R}\}$ é uma semi-algebra e vamos querer estender a nossa medida $\mu: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definida na semi-álgebra $\mathcal{S}$ e vamos supor que μ é aditiva.

Definição: $\mu: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\phi \in \mathcal{C}$ é aditiva se:

$\boxed{1)\ \mu(\phi) = 0 \quad ; \quad 2)\ E_1 \dots E_n \in \mathscr{C},\ E = \sum_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{C},\ \mu(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)}$

Ora atrás definimos $\mu(a,b] = b-a$, mas podemos escrever $(a,b] = \sum_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$ e temos de ter cuidado com a definição.

Então, o que vamos fazer, é partir de uma função μ que vamos supôr ser aditiva numa semi-álgebra e vamos estender μ à álgebra gerada por essa semi-álgebra. Agora já vimos que os elementos da álgebra gerada pela semi-álgebra têm uma representação simples

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{S}) &= \text{álgebra gerada por } \mathcal{S} \\ &= \Big\{ \sum_{j=1}^{n} E_j ,\ E_j \in \mathcal{S} \Big\} \end{aligned}}$$

$\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$
aditiva

Vamos denotar a extensão de μ a $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ por ν e

$$\nu : \underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{S})}_{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} := \overline{\mathbb{R}}_+$$

e como definimos $\nu(A)$? Ora a maneira natural é definir da seguinte forma, como $A \in \mathcal{A}$ então, $A = \sum_{j=1}^{n} E_j$, logo $\boxed{\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j).}$

Precisamos de ver que $\nu(A)$ está bem definida e que ν é aditiva **!**

nota que A pode ser escrito de formas diferentes e $\nu(A)$ não pode depender disso.

① $\boxed{\nu \text{ está bem definida.}}$

Seja $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ e vamos supor que A tem duas decomposições distintas.

$$A = \sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{k=1}^{m} F_k \quad , E_j, F_k \in \mathcal{S}$$

Precisamos de ver que $\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(F_k)$ ie o valor

de $\nu(A)$ não depende da representação de A.

Lembre que assumimos que μ é aditiva na semi-álgebra

Então como $A = \sum_{j=1}^{n} E_j$, $E_j \subseteq \underset{\sum_{k=1}^{m} F_k}{\overset{\parallel}{A}}$ $\forall j = 1, \ldots, n$

$$\therefore E_j \subseteq \sum_{k=1}^{m} F_k = A$$

$$\therefore E_j = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(E_j \cap F_k)}_{\in \mathcal{S}}$$

porque $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra.

$$\therefore \mu(E_j) = \mu\left(\sum_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)\right) \underset{\mu \text{ é aditiva em } \mathcal{S}}{=} \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$$

Analogamente, $\mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)$. Logo

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^{m} \mu(F_k) \checkmark$$

Isto diz-nos que ν está bem definida.

② $\boxed{\nu \text{ é aditiva}}$

Queremos ver que se $A = \sum_{j=1}^{n} E_j$, $E_j, A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ então

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu(E_j) \ ?$$

(observa que basta fazer com $n=2$)

Ora $E_j \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, logo $E_j = \sum_{k=1}^{l_j} A_{j,k}$ com $A_{j,k} \in \mathcal{S}$ a semi-álgebra.

Então $\nu(A) \underset{\text{def de } \nu}{=\!=} \sum_{k=1}^{l_j} \mu(A_{j,k})$. Ora

$$A = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l_j} A_{j,k}$$

e assim A está escrito como união disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. Por definição de ν temos:

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l_j} \mu(A_{j,k})$$

Mas por definição temos também $\sum_{k=1}^{l_j} \mu(A_{j,k}) = \nu(E_j)$

$$\therefore \ \nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu(E_j)$$

$\therefore$ ν é aditiva.

③ $\boxed{\nu \text{ é uma extensão de } \mu}$

Ora isto é trivial já que $\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$, $E_j \in \mathcal{J}$

se $A \in \mathcal{J}$ então $A = A \in \mathcal{J}$

$$\therefore \quad \nu(A) = \mu(A) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mu(\phi)}$$

Observação: lembre que μ aditiva então $\mu(\phi) = 0$.

Na definição de aditividade de μ, se $\exists A \in \mathcal{C}$ tal que $\mu(A) < \infty$ então $\mu(A) = \mu(A \cup \phi) = \mu(A) + \mu(\phi)$

$$\therefore \quad \mu(\phi) = 0.$$

Assim a condição 1) resulta de 2).

Observação: Se $E, F \in \mathcal{C}$, $E \subseteq F$, $F \setminus E \in \mathcal{C}$

$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é aditiva

Então:

1) se $\mu(E) = +\infty \implies \mu(F) = +\infty$

2) se $\mu(E) < +\infty \implies \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$

Em ambos os casos temos $\mu(E) \le \mu(F)$.

(Verifique!)

$\boxed{4}$ A extensão é única.

Sejam ν_1 e ν_2 ambas definidas em $\mathcal{A}(\mathcal{J})$ aditivas e tais que $\nu_1(A) = \nu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$. Queremos ver que $\nu_1 \equiv \nu_2$.

Observa que se $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, então $A = \sum_{j=1}^{n} E_j$, $E_j \in \mathcal{S}$.

$$\text{Ora } \nu_1(A) \underset{\substack{\text{aditividade}\\ \text{de } \nu_1}}{=} \sum_{j=1}^{n} \nu_1(\underset{\mathcal{S}}{\underset{\cap}{E_j}}) \underset{\substack{\nu_1 = \nu_2\\ \text{em } \mathcal{S}}}{=} \sum_{j=1}^{n} \nu_2(E_j) \underset{\substack{\text{aditividade}\\ \text{de } \nu_2}}{=} \nu_2(A)$$

Esta extensão que acabamos de provar que é única, permite estender uma função aditiva definida numa semi-álgebra à álgebra gerada por essa semi-álgebra. Essa extensão é única e é aditiva.

($1^{\underline{a}}$ extensão)

No caso de estarmos em $\mathbb{R}$, começamos por definir a função na semi-álgebra dos intervalos e estendemos a uma função aditiva definida na álgebra gerada. Mas o nosso objetivo é estender a função a classes maiores de conjuntos. Vamos então introduzir a seguinte definição.

<u>Definição</u> σ-álgebra.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é uma σ-álgebra se:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

3) $A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{F}$

Se $\mathcal{A}$ é álgebra então $\mathcal{A}$ é fechado para uniões finitas.
Se $\mathcal{F}$ é σ-álgebra então $\mathcal{F}$ é fechado para uniões numeráveis

Vamos agora definir a menor σ-álgebra que contém uma algebra. Já vimos antes que os elementos da álgebra gerada por uma semi-álgebra são escritos como uniões finitas disjuntas de elementos da semi-álgebra. No entanto, não vamos ter o mesmo tipo de representação para os elementos de uma σ-álgebra.

Seja $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Esta definição é a mesma que vimos para a álgebra ie se $\mathcal{C}$ é uma família então $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \supseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ é uma σ-algebra e se $\mathcal{B}$ é uma σ-algebra tal que $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{C}$ então $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

<u>Definição</u>: μ σ-aditiva

Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\phi \in \mathcal{C}$, $\mu: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

μ é σ-aditiva se

1) $\mu(\phi) = 0$.

2) $E_j \in \mathcal{C}$

$j \neq k, \; E_j \cap E_k = \phi$

$E = \sum_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{C}$ então $\mu(E) = \sum_{j \geq 1} \mu(E_j)$.

! a aditividade era o mesmo que acima, mas com uniões disjuntas finitas

Exemplo

Seja $\Omega = (0,1)$; $\mathcal{C} = \{ (a,b] \; ; \; 0 \leq a < b < 1 \}$ e

$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por:

$$\mu(a,b] = \begin{cases} \text{se } a = 0 & \text{vale } +\infty \\ \text{se } a > 0 & \text{vale } b-a \end{cases}$$

μ é aditiva mas não é σ-aditiva. Ora

$(0, 1/2] = \sum_{j \geq 1} (x_{j+1}, x_j]$ $\quad x_1 = 1/2$; $x_j \downarrow 0$ $\quad x_j > x_{j+1} > 0$

$\mu(0, 1/2] = +\infty$ e $\mu(x_{j+1}, x_j] = x_j - x_{j+1}$ e $\sum_{j \geq 1} \mu(x_{j+1}, x_j] = 1/2$

<u>Definição</u> : Uma medida é uma função σ-aditiva definida numa classe de conjuntos que toma valores positivos. Quando a função tomar valores negativos vamos dizer que é uma medida com sinal.

<u>Definição</u> : $\mathcal{C}$ classe de conjuntos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Dado $E \in \mathcal{C}$, dizemos que μ é contínua por baixo em E se $\forall \; (E_n)_{n \geq 1}$ com $E_n \in \mathcal{C}$, $E_n \uparrow E$ (isto significa que $E_n \subseteq E_{n+1}$ e $\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$) se tem $\mu(E) = \lim_n \mu(E_n)$.

Dado $E \in \mathcal{C}$, dizemos que μ é contínua por cima em E se $\forall (E_n)_{n\geq 1}$ com $E_n \in \mathcal{C}$, $E_n \downarrow E$ (isto significa que $E_n \supseteq E_{n+1}$ e $\bigcap_{n\geq 1} E_n = E$) e $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_n) < \infty$

então $\mu(E) = \lim_n \mu(E_n)$.

Observação: μ é contínua em E se μ é contínua por cima e por baixo em E.

Observação: Na continuidade por cima exigimos que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) < \infty$. Suponha que $\Omega = \mathbb{R}$, $\lambda\,(a,b] = b-a$

Seja $E_n = [n, +\infty)$. Então $E_n \downarrow \emptyset$ e $\lambda(E_j) = +\infty$ $\forall j$

e não se tem $\underbrace{\lambda(E_n)}_{+\infty\ \forall n} \not\to \lambda(E) = \lambda(\emptyset) = 0$

FALSO!

Esta medida não seria contínua por cima no $\emptyset$.

Para não termos este tipo de problemas pedimos que exista um conjunto com medida finita.

Observação: Como μ é aditiva já sabemos que se $A \subseteq B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$. E portanto os limites acima ie

$\lim_n \mu(E_n)$ existem.

LEMA

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra, e $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é aditiva.

1) se μ é σ-aditiva $\Longrightarrow$ μ é contínua em A $\forall A \in \mathcal{A}$
2) se μ é contínua por baixo $\forall A \in \mathcal{A}$ então μ é σ-aditiva.
3) Se μ é contínua por cima no $\emptyset$ e se μ for finita então μ é σ-aditiva.

- Observa que o critério 2) acima nos permite provar a σ-aditividade, olhando apenas para a continuidade por baixo ie em apenas conjuntos que crescem.
- Mais à frente vamos enfraquecer 3) ie o facto de μ ser finita.

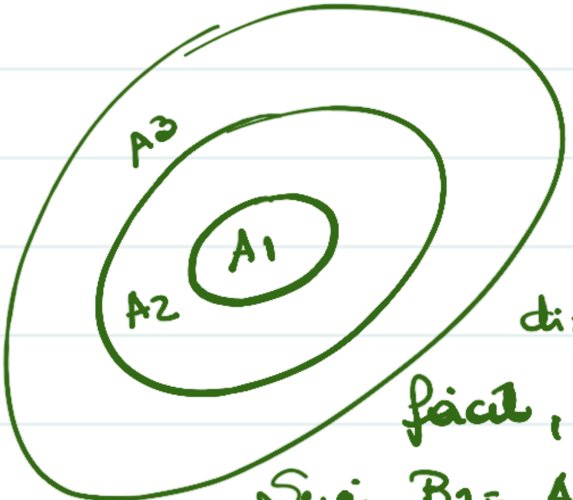
PROVA: 1) Seja $A \in \mathcal{A}$. Temos de provar a continuidade por cima e por baixo.

- continuidade por baixo.

$$A_j \uparrow A \; ; \; A_j \subseteq A_{j+1}$$

$$\bigcup_{j \geq 1} A_j = A$$

Queremos provar que $\mu(A_j) \xrightarrow[j \to +\infty]{} \mu(A)$



Temos uma sequência crescente como na figura. Para usarmos a σ-aditividade, precisamos de transformar estes conjuntos em conjuntos disjuntos. Ora neste caso é muito fácil, basta tomar os "anéis".

Seja $B_1 = A_1$,

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus A_2$

$\vdots$

$B_k = A_k \setminus A_{k-1}$

$A_j \in \mathcal{A}$, logo $B_k = A_k \setminus A_{k-1} = \underbrace{\underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{A_k}} \cap \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{A_{k-1}^c}}}_{\underset{\mathcal{A}}{\cap}}$

- $B_k \in \mathcal{A}$
- $B_k \cap B_j = \emptyset$ se $j \neq k$

ora se $j < k$ então

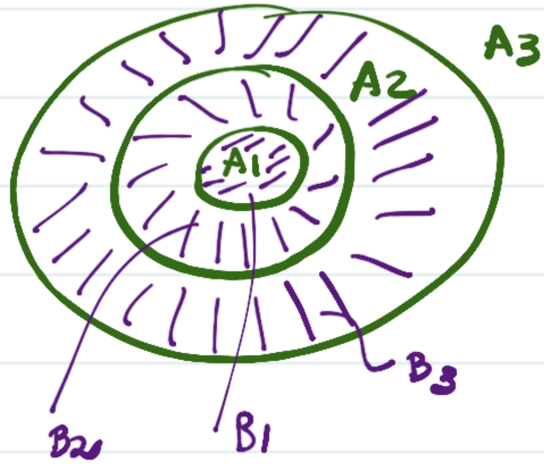
$B_j = A_j \setminus A_{j-1} \subseteq A_j$

$B_k = A_k \setminus A_{k-1}$

$\therefore B_k \cap A_{k-1} = \emptyset$

Mas como $j < k$ então $B_j \subseteq A_{k-1}$ e portanto $B_j \cap B_k = \emptyset$. (disjuntos 2 a 2)

Afirmação: $\bigcup_{j} B_j = A$



Nota que $A = \bigcup_{j \geq 1} A_j$

Como $B_j \subseteq A_j$ (ver figura)

então $\bigcup_{j \geq 1} B_j \subseteq \bigcup_{j \geq 1} A_j = A$

Falta então provar a outra inclusão ie $A \subseteq \bigcup_{j \geq 1} B_j$

Observe que $A_j = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_j$ (ver figura)

$\therefore \; A_j \subseteq \bigcup_{k \geq 1} B_k$ e isto vale para todo j

Logo $A = \bigcup_{j \geq 1} A_j \subseteq \bigcup_{k \geq 1} B_k$

Até aqui vimos que os conjuntos B_j são disjuntos dois a dois e a união é A: $A = \sum_{j \geq 1} \underset{\underset{A}{\cap}}{B_j}$

Pela σ-aditividade,

$$\mu(A) = \sum_{j \geq 1} \mu(B_j) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$$

$$\underset{\mu \text{ é aditiva}}{=} \lim_{n \to +\infty} \mu\left(\sum_{j=1}^{n} B_j \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Logo $\boxed{\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).}$ ie μ é contínua por baixo em A.

- continuidade por cima em A

Sejam $A_j \downarrow A$, $A_j \in \mathcal{A}$ e queremos provar que

$$\lim_{j\to+\infty} \mu(A_j) = \mu(A).$$

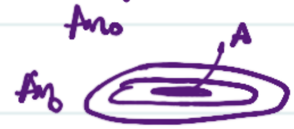
Agora temos uma sequência decrescente como na figura:

$$A_1 \supseteq A_2$$
$$A_2 \supseteq A_3$$
$$\vdots$$

A ideia vai ser transformar esta sequência para obter uma outra que convirja para $A_{n_0} \setminus A$ e usar a continuidade por baixo de μ, que já provámos acima.

Vamos supor, para não sobrecarregar notação que $\mu(A_1) < \infty$.

Senão repetimos tudo partindo de A_{n_0}



Consideremos os "anéis"

$$B_1 = A_1 \setminus A_2$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_3$$

$$B_3 = A_3 \setminus A_4$$

$$\vdots$$

$$B_k = A_k \setminus A_{k+1} \; ; \; k \geq 1$$

- $B_k \in \mathcal{A}$; $B_k \subseteq A_k$
- $B_k \cap B_j = \phi$, $k \neq j$

assumimos $j < k$ e $B_j \cap A_{j+1} = \phi$, $B_k = A_k \setminus A_{k+1} \subseteq A_k \subseteq A_{j+1}$

$$\therefore \; B_j \cap B_k = \phi , \; j \neq k.$$

Além disso, $A \cup \left(\sum_{j \geq 1} B_j \right) = A_1$.

Vamos provar esta identidade.

Comecemos por provar que $A_1 \subseteq A \cup \left(\sum_{j\geq 1} B_j \right)$.

Seja $x \in A_1$. a) se $x \in \bigcap_{j \geq 1} A_j = A$

logo $x \in A \cup \left(\sum_{j\geq 1} B_j \right)$.

b) se $x \notin \bigcap_{j\geq 1} A_j = A$

então $\exists \, j_0$ tal que $x \notin A_{j_0}$.

Como os conjuntos são decrescentes,

seja $j = \min \{ k \, ; \, x \notin A_k \}$. Então $x \notin A_j$ e $x \in A_{j-1}$.

Necessariamente temos de ter $j \geq 2$, já que $x \in A_1$.

Como $x \notin A_j$, $x \in A_{j-1}$ então $x \in A_{j-1} \setminus A_j = B_{j-1}$.

Assim $x \in \bigcup_{j \geq 1} B_j$

$$\therefore x \in A \cup \left(\sum_{j \geq 1} B_j \right) \checkmark$$

Agora vamos provar a outra inclusão ie

$$\text{se } x \in A \cup \left(\sum_{j \geq 1} B_j \right) \Rightarrow x \in A_1.$$

$$A = \bigcap_{j \geq 1} A_j \subseteq A_1$$

$$B_k \subseteq A_k \subseteq A_1 \; ; \; \forall k$$

$$\therefore \sum_{j \geq 1} B_j \subseteq A_1$$

em ambos os casos se tem
1. $x \in A \Rightarrow x \in A_1$.
2. $x \in \sum_{j \geq 1} B_j \Rightarrow x \in A_1$ $\checkmark$

Notemos então que

$$\left. \begin{array}{l} B_k \cap A = \phi \\ B_k \cap A_{k+1} = \phi \\ A = \bigcap_{k \geq 1} A_k \subseteq A_{k+1} \end{array} \right\} \text{disjuntos 2 a 2.}$$

Então temos $\mu(A_1) = \mu(A) + \mu\left(\sum_{j \geq 1} B_j \right)$

$$\overset{\sigma\text{-aditividade}}{=} \mu(A) + \sum_{j \geq 1} \mu(B_j)$$

$$= \mu(A) + \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)}_{\mu(B_1 \cup \ldots \cup B_n)}$$ aditividade

∇ • $\mu(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \mu(A_1 \setminus A_{n+1})$

$$= \mu(A) + \lim_{n\to+\infty} \mu(A_1 \setminus A_{n+1}) \quad (*)$$

Ora $A_1 = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_1 \setminus A_{n+1})$, e então por aditividade $\mu(A_1) = \underbrace{\mu(A_1 \cap A_{n+1})}_{\mu(A_{n+1})} + \mu(A_1 \setminus A_{n+1})$.

e $\mu(A_{n+1}) \leq \mu(A_1) < \infty$

$\therefore \mu(A_1 \setminus A_{n+1}) = \mu(A_1) - \mu(A_{n+1})$

Então $(*) = \mu(A) + \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_{n+1})$

$(*) = \mu(A_1)$

Como $\mu(A_1) < \infty$, subtraimos dos dois lados da igualdade e obtemos:

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n+1})$$

Observa que o resultado que acabamos de provar, na prática não vai ser muito usado neste curso porque o que vamos querer fazer é provar a σ-aditividade. No entanto, é útil saber o resultado.

2) μ contínua por baixo $\Rightarrow$ μ σ-aditiva

Sejá $A, A_j \in \mathcal{A}$. Assuma que $A = \sum_{j\geq 1} A_j$ e queremos ver que $\mu(A) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j)$.

Vamos construir uma sequência $B_j \uparrow A$. Seja $B_j = \sum_{k=1}^{j} A_k$.

Como $A_k \in \mathcal{A}$, e $\mathcal{A}$ é uma álgebra, então $B_j \in \mathcal{A}$, e $B_j \uparrow A$. Por continuidade de μ temos

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right)$$

$$\underset{\text{aditividade}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

$$= \sum_{j\geq 1} \mu(A_j)$$

e com isto fica provado que μ é σ-aditiva.

3) μ aditiva, μ finita, μ contínua por cima no ϕ

$\Downarrow$

μ σ-aditiva

Seja $A = \sum_{j\geq 1} A_j$, $A, A_j \in \mathcal{A}$ e queremos ver que

$$\mu(A) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j) .$$

Temos de construir uma sequência de conjuntos que vai decrescer para o $\emptyset$. Sejá $B_n = \sum_{j\geq n} A_j$. Ora $B_n \downarrow \phi$. Sejá $x \in \sum_{j\geq 1} A_j$. Como os conjuntos A_j's são disjuntos, então

$x \in A_j$ para algum j. Mas então $x \notin B_n \; \forall n \geq j$ e portanto $\bigcap_{n\geq 1} B_n = \phi$.

$$\therefore \; B_n \downarrow \phi$$

Nota também que $B_n \in \mathcal{A}$. Isto, à partida não é imediato pois B_n é definido como uma união não finita. Mas

$$B_n = \underbrace{A \setminus (\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}}_{\in \mathcal{A}})}_{\in \mathcal{A}}$$

$\therefore \; B_n \in \mathcal{A}$.

Agora podemos usar a continuidade de μ, i.e.

$$\mu(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(\phi) = 0$$

desde que se tenha $\mu(B_j) < \infty$ para algum j.

E para termos o resultado anterior não precisamos que μ seja finita (mais à frente já vamos generalizar este resultado.)

Ora, nota que

$$\mu(A) = \mu(\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup B_n}_{\text{disjuntos 2 a 2}})$$

$$B_n = \sum_{j \geq n} A_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) + \mu(B_n)$$

$$\therefore \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) + \mu(B_n)$$

$$= \sum_{j\geq 1} \mu(A_j)$$

↳ uma que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(\cap B_n) = \mu(\phi) = 0.$

<u>EXEMPLO:</u> $\Omega = (0,1)$

$$\mathcal{C} = \{ (a,b] : 0 \leq a < b < 1 \}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$$

$$\mu(a,b] = \begin{cases} b-a & ; \quad a>0 \\ +\infty & ; \quad a=0. \end{cases}$$

μ é aditiva mas ñ é σ-aditiva

Seja $A_n \downarrow \phi$, $A_n \in \mathcal{A}$.

$$\therefore A_n = (a_{n,1}, b_{n,1}] \cup \ldots \cup (a_{n,k_n}, b_{n,k_n}]$$

disjuntos. Se $a_{n,1} = 0 \ \forall n$ então $\mu(A_n) = +\infty$.

Se $\exists$ n_0 tal que $a_{n_0,1} > 0$, vamos ver que

μ é uma medida c fínita por cima mas não é σ-aditiva.

Lembre que atrás já provamos o seguinte resultado.

<u>Teorema:</u> Se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é uma semi-álgebra e $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ é aditiva então $\exists$ $\nu: \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ aditiva tal que

1) $\nu(A) = \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{S}$

2) ν é única.

Agora vamos provar o seguinte resultado.

Teorema: Se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é uma semi-álgebra e $\mu : \mathcal{S} \to \underbrace{\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}_{=\overline{\mathbb{R}}_+}$ é σ-aditiva então $\exists\, \nu : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ σ-aditiva tal que

1) $\nu(A) = \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{S}$

2) ν é única, ie se $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ e $\mu_1(A) = \mu_2(A) \ \forall A \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu_1(E) = \mu_2(E)$ $\forall E \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$.

(*) este teorema é o mesmo que o anterior mas agora partimos de uma medida σ-aditiva.

PROVA: Suponha que $A = \sum_{j \geq 1} A_j$, $A, A_j \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ e queremos ver que

$$\nu(A) = \sum_{j \geq 1} \nu(A_j)$$

Agora podemos usar a representação dos elementos de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ie $A_j \in \mathcal{A}(\mathcal{S}) \Rightarrow A_j = \sum_{k=1}^{l_j} E_{j,k}$ com $E_{j,k} \in \mathcal{S}$

Analogamente $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}) \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{m} F_i$, $F_i \in \mathcal{S}$.

Assim temos $\nu(A_j) = \sum_{k=1}^{l_j} \mu(E_{j,k})$ e $\nu(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(F_i)$.

Ora $\sum_{j \geq 1} \nu(A_j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{k=1}^{l_j} \mu(E_{j,k})$.

$$F_i \subseteq A = \sum_{j\geq 1} A_j = \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\ell_j} E_{j,k}$$

Logo
$$F_i = \underbrace{\sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\ell_j} \underbrace{\underset{\mathcal{S}}{\underset{\in}{E_{j,k}}} \cap \underset{\mathcal{S}}{\underset{\in}{F_i}}}_{\in \, \mathcal{S}}}_{\text{disjuntos 2 a 2.}}$$

$$\underset{\uparrow \ \sigma\text{-aditividade em } \mathcal{S}}{\mu(F_i) =} \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\ell_j} \mu(E_{j,k} \cap F_i)$$

$$\therefore \ \nu(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(F_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\ell_j} \mu(E_{j,k} \cap F_i)$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} F_i = A$$

$$= \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\ell_j} \mu(\underbrace{E_{j,k} \cap A}_{= \, E_{j,k}})$$

$$E_{j,k} \subseteq A$$

$$= \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{\ell_j} \mu(E_{j,k})$$

$$= \sum_{j\geq 1} \nu(A_j) \quad \therefore \ \nu \text{ é } \sigma\text{-aditiva} \ \checkmark$$

Extensão: Até agora vimos que temos

$$\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

e estendemos a $\nu : A(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Se μ é aditiva então ν é aditiva e se μ é σ-aditiva então ν é σ-aditiva. Agora vamos estender

$$\nu : A(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \quad \sigma\text{-aditiva}$$

a $\quad \pi : \mathcal{F}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ σ-aditiva

Para tal vamos definir uma função

$\pi^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ que será uma medida exterior.

Seja A uma álgebra, e seja $\nu : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Agora vamos definir π^* da seguinte forma:

Dado $A \subseteq \Omega$, consideramos $\{A_j\}_{j\geq 1}$ com $A_j \in A$, de tal modo que $A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} A_j$

isto é $\{A_j\}_{j\geq 1}$ é uma cobertura de A.

- O conjunto das coberturas é não vazio porque Ω é uma cobertura de A, ie $A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} A_j$ com $A_1 = \Omega$ e $A_j = \phi$ $\forall j \geq 2$.

e agora definimos $\pi^*(A) = \inf\limits_{\{A_j\}_{j\geq 1}} \sum\limits_{j\geq 1} \underbrace{\nu(A_j)}$

$A_j \in A$ portanto $\nu(A_j)$ está definido.

Esta função chama-se a medida exterior de Lebesgue

Observação: Nota que se $A \in \mathcal{A}$ e $A = \sum_{i\geq 1} A_i$ com $A_i \in \mathcal{A}$, então $\mu(A)$ $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$ (assumindo apenas a aditividade)

Ora nota que como $A = \sum_{i\geq 1} A_i$ então $A \supseteq \sum_{i=1}^{n} A_i$ e por monotonia das funções aditivas temos que $\mu(A) \geq \mu\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \underset{\text{aditividade}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, como vale para todo n,

$$\mu(A) \geq \lim_{n\to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i).$$

Por outro lado, pela definição de π^* dado como o ínfimo obtemos a desigualdade contrária ie

$$\pi^*(A) \leq \sum_{i\geq 1} \nu(A_i).$$

Seja Ω com mais de um ponto. $\mu(\phi) = 0$ e $\mu(E) = 1$ se $E \neq \phi$. μ é med ext? μ é uma medida?

Definição: Medida exterior

Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}$. Seja $\mu: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

Dizemos que μ é uma medida exterior se:

1) $\mu(\phi) = 0$.
2) $E \subseteq F$, $E, F \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$ (Monotonia)
3) $E, E_i \in \mathcal{C}$, $E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} E_i \Rightarrow \mu(E) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$
(σ- subaditividade)

Afirmação: π^* é uma medida exterior

1) $\pi^*(\phi) = 0$. Seja $E_i = \phi$. Então

$$\pi^*(\phi) \leq \sum_{i\geq 1} \nu(E_i) = 0.$$

2) A, B com $A \subseteq B \Rightarrow \pi^*(A) \leq \pi^*(B)$?

Ora dada qualquer cobertura de B essa cobertura também é de A. Logo como $\pi^*(A)$ é definida como o ínfimo, resulta que $\pi^*(A) \leq \pi^*(B)$.

3) Agora vamos provar a σ-subaditividade, ie se $A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i$ então $\pi^*(A) \leq \sum_{\geq 1} \pi^*(A_i)$.

Nota que se $\pi^*(A_i) = +\infty$ para algum i então temos o lado direito igual a $+\infty$ e não há nada a provar.

Suponhamos agora que $\pi^*(A_i) < \infty$ $\forall i$. Por definição de π^* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $A_{i,k} \in \mathcal{A}$ tal que

$$A_i \subseteq \bigcup_{k \geq 1} A_{i,k} \quad e \quad \pi^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \sum_{k \geq 1} \nu(A_{i,k}) \quad \forall i$$

Agora divido por 2^i, ou seja para cada i $\exists$ $\varepsilon_i = \varepsilon/2^i$.

isto é para A_i, existe uma cobertura que quase realiza $\pi^*(A_i)$. Ora $A \subseteq \bigcup_i \bigcup_k A_{i,k}$ porque $A \subseteq \bigcup_i A_i$.

Logo $$\pi^*(A) \leq \sum_{i,k \geq 1} \nu(A_{i,k})$$

$$\leq \sum_{i \geq 1} \pi^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$= \sum_{i \geq 1} \pi^*(A_i) + \varepsilon$$

e como isto vale $\forall \varepsilon > 0$ concluímos que

$$\pi^*(A) \leq \sum_{i \geq 1} \pi^*(A_i)$$

Conjunto dos mensuráveis.

Seja μ^* uma medida exterior.

Definição Um conjunto $A \subseteq \Omega$ diz-se mensurável com respeito a μ^* se $\forall E \subseteq \Omega$ se tem

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(E \setminus A) \quad (*)$$

ie o conjunto A "divide bem" qualquer conjunto E.

✡ obs: há uma desigualdade em $(*)$ que sempre vale. Nota que $E \subseteq (E\cap A) \cup (E \setminus A) \cup \phi \cup \phi \ldots$, e como μ^* é σ-subaditiva temos que

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

! o conceito de mensurabilidade depende de μ^* ! Um conjunto pode ser mensurável para uma medida exterior e não ser para outra.

Vamos denotar por $\mathcal{M}$ a família dos conjuntos mensuráveis para π^* e vamos provar: $\boxed{*}$ $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A}$

$\boxed{**}$ $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra.

$\boxed{*}$ $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A}$ (nesta prova usamos π^*)

Seja $A \in \mathcal{A}$. Observa que de ✡ acima, basta ver que para $E \subseteq \Omega$ se tem, $\pi^*(E) \geq \pi^*(E \cap A) + \pi^*(E \setminus A)$.

Se $\pi^*(E) = +\infty$ então a desigualdade é óbvia.

Se $\pi^*(E) < \infty$ então $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_j \in \mathcal{A}$, tal que $E \subseteq \bigcup_{j \geq 1} A_j$ e

$$\pi^*(E) + \varepsilon \overset{\text{definição de ínfimo}}{\geq} \sum_{j \geq 1} \nu(A_j) \geq \pi^*(E).$$

Mas $E \cap A \subseteq \bigcup_{j \geq 1} A_j \cap A$ logo temos uma cobertura

e $E \setminus A \subseteq \bigcup_{j \geq 1} (A_j \setminus A)$

e $A_j \cap A \in \mathcal{A}$ e $A_j \setminus A \in \mathcal{A}$ por definição de álgebra.

Logo como $(A_j \cap A)_j$ é cobertura de $E \cap A$ temos

$$\pi^* (E \cap A) \leq \sum_{j \geq 1} \nu (A_j \cap A)$$

Analogamente $\pi^* (E \setminus A) \leq \sum_{j \geq 1} \nu (A_j \setminus A)$.

Daqui resulta que

$$\begin{aligned}
\pi^* (E \cap A) &+ \pi^* (E \setminus A) \\
&\leq \sum_{j \geq 1} \nu (A_j \cap A) + \nu (A_j \setminus A) \\
&= \sum_{j \geq 1} \nu\big((A_j \cap A) \cup (A_j \setminus A)\big) = \sum_{j \geq 1} \nu (A_j) \\
&\leq \pi^* (E) + \varepsilon
\end{aligned}$$

ν é σ-aditiva, logo ν aditiva

Como vale para todo $\varepsilon > 0$ resulta que

$$\pi^* (E \cap A) + \pi^* (E \setminus A) \leq \pi^* (E)$$

$\boxed{**}$ $\mathcal{M}$ é uma σ- álgebra (esta prova é geral, ie vale para qualquer medida exterior)

1). Temos de provar que $\Omega \in \mathcal{M}$. Mas isso significa que $\forall E \subseteq \Omega$

$\pi^*(E) = \pi^*(E \cap \Omega) + \pi^*(\underbrace{E \cap \Omega^c}_{= \phi}) = \pi^*(E)$ pois $\pi^*(\phi) = 0$.

2). fechado para o complementar

Ora, seja $A \in \mathcal{M}$, logo se $E \subseteq \Omega$ então

$$\pi^*(E) = \pi^*(E \cap A) + \pi^*(E \setminus A)$$
$$= \pi^*(E \cap (A^c)^c) + \pi^*(E \cap A^c)$$
$$= \pi^*(E \setminus A^c) + \pi^*(E \cap A^c), \text{ logo } A^c \in \mathcal{M}.$$

3). fechado para uniões numeráveis, ie se $A_j \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{M}$

Vamos fazer primeiro para uniões finitas e depois para uniões numeraveis.

1. $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$

Seja $E \subseteq \mathcal{M}$. Como $A \in \mathcal{M}$ sabemos que

$$\pi^*(E) = \pi^*(E \cap A) + \pi^*(E \setminus A^c).$$

Já sabemos, por subaditividade de π^*, que vale a desigualdade $\leq$ e queremos provar $\geq$ com $A \cup B$ em vez de A:

ie $\quad \pi^*(E) \geq \pi^*(E \cap (A \cup B)) + \pi^*(E \setminus (A \cup B))$. ✡

Como $B \in \mathcal{M}$ para o conjunto $E \setminus A$ temos

$$\pi^*(E \setminus A) = \pi^*((E \setminus A) \cap B) + \pi^*((E \setminus A) \setminus B) \text{ isto}$$

porque $B \in \mathcal{M}$ e $E \setminus A \subseteq \Omega$. Agora temos

$$\pi^*(E) = \pi^*(E \setminus A) + \pi^*(E \cap A) \quad ; \text{porque } A \in \mathcal{M}$$

$$= \pi^*((E\setminus A)\cap B) + \pi^*((E\setminus A)\setminus B) + \pi^*(E\cap A)$$

$$E\setminus A\cap B^c = E\cap \underbrace{A^c\cap B^c}_{=(A\cup B)^c} = E\cap (A\cup B)^c = E\setminus (A\cup B)^c$$

$$= \pi^*((E\setminus A)\cap B) + \pi^*(E\setminus (A\cup B)^c) + \pi^*(E\cap A)$$

Lembre-se de ✡.

Basta agora provar que

$$\boxed{\pi^*(E\cap A) + \pi^*((E\setminus A)\cap B) \geq \pi^*(E\cap(A\cup B))}$$

Ora $E\cap(A\cup B) \subseteq (E\cap A)\cup((E\setminus A)\cap B)$, isto vale porque

$$\underbrace{[E\cap(A\cup B)]\cap A}_{=E\cap A} \cup \underbrace{[E\cap(A\cup B)]\cap A^c}_{=(E\cap A^c)\cap(\underbrace{(A\cup B)\cap A^c}_{\subseteq B})}$$

$$= (E\cap A^c)\cap B = (E\setminus A)\cap B$$

e obtemos o que queríamos, por subaditividade de π^* fica provado.

∴ $\mathcal{M}$ é fechado por uniões finitas ✓

Falta provar que $\mathcal{M}$ é fechado por uniões numeráveis.

Seja $A_j \in \mathcal{M}$, queremos ver que $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{M}$. Seja $E \subseteq \Omega$, e note que queremos provar que

$$\pi^*(E) = \pi^*\left(E\cap\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right)\right) + \pi^*\left(E\setminus\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right)\right)$$

Já sabemos que $\mathcal{M}$ é fechado para a união finita

logo $$\pi^*(E) = \pi^*\left(E\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) + \pi^*\left(E\setminus\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \quad (*)$$

Observa que $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcup_{j\geq 1} A_j$

Logo $\displaystyle E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j \supseteq E \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j$

e por monotonia de π^* temos

$$\pi^*(E) \geq \pi^*\Big(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)\Big) + \pi^*\Big(E \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j\Big)$$

Seja agora $F_1 = A_1$

$F_2 = A_2 \setminus A_1$

$\vdots$

$F_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$

- $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} F_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$
- F_n's são disjuntos, $F_n \cap F_k = \phi$, $n \neq k$
- $F_n \in \mathcal{M}$ porque já vimos que $\mathcal{M}$ é fechado para uniões finitas disjuntas e complementares e portanto também é fechado para $A_n \setminus (\ldots)$

Então $\displaystyle\pi^*(E) \geq \pi^*\Big(E \cap \Big(\sum_{j=1}^{n} F_j\Big)\Big) + \pi^*\Big(E \setminus \Big(\bigcup_{j\geq 1} A_j\Big)\Big)$.

Agora note que $\displaystyle\pi^*\Big(E \cap \sum_{j=1}^{n} F_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \pi^*(E \cap F_j)$.

Para provar a igualdade anterior vamos usar indução.

- $n=1$ $\quad\pi^*(E \cap F_1) = \pi^*(E \cap F_1)$ ✓
- assuma para n e provemos para $n+1$.

Observe que $F_k \in \mathcal{M}$ pois já vimos que $\mathcal{M}$ é uma álgebra.
Ora como $F_{n+1} \in \mathcal{M}$ temos

$$\pi^*\left(E \cap \sum_{j=1}^{n+1} F_j\right) = \pi^*\left(E \cap \sum_{j=1}^{n+1} F_j \cap F_{n+1}\right)$$

$$+ \pi^*\left(E \cap \sum_{j=1}^{n+1} F_j \cap F_{n+1}^c\right)$$

$$= \pi^*\left(E \cap F_{n+1}\right) + \pi^*\left(E \cap \sum_{j=1}^{n} F_j\right)$$

Pela hipotese de indução temos $= \pi^*(E \cap F_{n+1})$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \pi^*(E \cap F_j)$$

$$\therefore \pi^*\left(E \cap \sum_{j=1}^{n+1} F_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \pi^*(E \cap F_j) \checkmark$$

Agora vamos ver que $\mathcal{M}$ é fechado para uniões numeráveis.
Ora, agora temos

$$\pi^*(E) \geqslant \pi^*\left(E \cap \sum_{j=1}^{n} F_j\right) + \pi^*\left(E \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \pi^*(E \cap F_j) + \pi^*\left(E \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j\right)$$

isto vale para todo n, logo fazendo $n \to +\infty$, temos

$$\pi^*(E) \geqslant \underbrace{\sum_{j\geq 1} \pi^*(E \cap F_j)}_{\text{subaditividade}} + \pi^*\left(E \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j\right)$$

$$\text{subaditividade} \geq \pi^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j\geq 1} F_j\right)\right) + \pi^*\left(E \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j\right)$$

Mas $\bigcup_{j\geq 1} F_j = \bigcup_{j\geq 1} A_j$

$$\therefore \pi^*(E) \geq \pi^*(E \cap (\bigcup_{j\geq 1} A_j)) + \pi^*(E \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j)$$

$\therefore$ $\mathcal{M}$ é fechado para uniões numeráveis.
Logo $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra e como $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A}$, então $\mathcal{M}$ contém a σ-álgebra gerada pela álgebra ie

$$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{A}).$$

$\boxed{***}$ $\pi^*|_{\mathcal{M}}$ ie $\pi^*: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
então π^* é σ-aditiva.

Vamos primeiro ver que $\pi^*(A) = \nu(A)$ para $A \in \mathcal{A}$.

- $\pi^*(A) \leq \nu(A)$

  tomamos a cobertura $A, \phi, \phi, \phi \ldots$

  e $\pi^*(A) \leq \sum_j \nu(A_j) = \nu(A) + \nu(\phi) + \ldots = \nu(A)$

- $\nu(A) \leq \sum_{j\geq 1} \nu(E_j)$ para todo $E_j \in \mathcal{A}$ tq $A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} E_j$.

Vamos agora construir uma família de conjuntos disjuntos como fizemos acima ie $F_1 = E_1$

$F_2 = E_2 \setminus E_1$

$\vdots$

$F_n = E_n \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1})$

$\cdot F_j \in \mathcal{A}$; $\bigcup_{j\geq 1} F_j = \bigcup_{j\geq 1} E_j$ e $F_j \cap F_k = \phi$ se $j \neq k$.

Ora $A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} E_j = \bigcup_{j\geq 1} F_j$

$\therefore \underset{\underset{\mathcal{A}}{\cap}}{A} = \sum_{j\geq 1} \underbrace{F_j \cap A}_{\underset{(\mathcal{A}}{\cap}}$ Logo $\nu(A) \underset{\substack{\sigma\text{-aditiva} \\ \text{na} \\ \text{álgebra}}}{=} \sum_{j\geq 1} \nu(\underbrace{F_j \cap A}_{\subseteq F_j \subseteq E_j})$

$$\leq \sum_{j\geq 1} \nu(E_j)$$

Como vale para qualquer cobertura logo

$$\nu(A) \leq \pi^*(A)$$

Agora vamos provar a σ-aditividade, ie $A_j \in \mathcal{M}$, $A_j \cap A_k = \phi$

então $\pi^*\left(\sum_{j\geq 1} A_j\right) = \sum_{j\geq 1} \pi^*(A_j)$

π^* é subaditiva, logo $\pi^*\left(\sum_{j\geq 1} A_j\right) \leq \sum_{j\geq 1} \pi^*(A_j)$.

Agora temos de provar a desigualdade contrária.

Mas note que

$$\pi^*\left(\sum_{j\geq 1} A_j\right) \underset{\text{monotonia}}{\geq} \pi^*\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right)$$

(aditividade)

$$= \sum_{j=1}^{n} \pi^*(A_j)$$

esta identidade foi provada por indução acima! $(E = \Omega)$

Como vale para todo n, fazemos $n \to +\infty$ e obtemos

$$\pi^*\left(\sum_{j\geq 1} A_j\right) \geq \sum_{j\geq 1} \pi^*(A_j) \quad \checkmark$$

(observe que a prova acima é geral e vale para qualquer medida exterior)

↳ veja o teorema 4.1 do Taylor.

$\boxed{****}$ Unicidade

Sejam $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F}(\mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tais que

$$\mu_1|_{\mathcal{A}} = \mu_2|_{\mathcal{A}}$$

Ω é μ σ-finito se $\exists\, E_j \uparrow \Omega$ t.q $\mu(E_j) < \infty \ \forall j$

Assuma ainda que Ω é μ_1 - σ finito (e aqui vamos exigir na definição que $E_j \in \mathcal{A}$) e portanto Ω também é μ_2 σ finito, já que $\mu_1 = \mu_2$ em $\mathcal{A}$.

Queremos concluir que $\mu_1 = \mu_2$.

observa que esta definição depende da medida μ.

Este resultado vai-nos permitir dizer que π^* é única quando restrita a $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, isto se partirmos de Ω que é σ-finito com respeito a ν. Não dizemos que a extensão a $\mathcal{M}$ é única, mas a restrição de π^* a $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ será única.

Definições: Ω, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{G}$ é uma classe monótona se

a) $A_j \in \mathcal{G}$, $A_j \subseteq A_{j+1} \Longrightarrow A = \bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{G}$

(fechada para sequências crescentes)

b) $B_j \in \mathcal{G}$, $B_j \supseteq B_{j+1} \Longrightarrow B = \bigcap_{j \geq 1} B_j \in \mathcal{G}$

(fechada para sequências decrescentes)

Afirmação: Se $\mathcal{G}_\alpha$ são classes monótonas, $\alpha \in I$, I conjunto de índices arbitrário

$\Downarrow$

$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha$ é uma classe monótona

• Se $\mathcal{F}$ é σ-algebra então $\mathcal{F}$ é classe monótona. ∇

Se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, então Vamos denotar por $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ a menor classe monótona que contém $\mathcal{C}$, para isso, basta tomar a intersecção de todas as classes monótonas que contém $\mathcal{C}$ porque a interseção é uma classe monótona e contém $\mathcal{C}$.

Vamos chamar a $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ a

"classe monótona gerada pela classe $\mathcal{C}$"

$\boxed{*}$ $\mathcal{P}(\Omega)$ é uma classe monótona que contém $\mathcal{C}$ e portanto a intersecção é não vazia.

LEMA: $\mathcal{A}$ álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é a classe monotona gerada por $\mathcal{A}$

$\mathcal{F}(\mathcal{A})$ é a σ-algebra gerada por $\mathcal{A}$.

Então $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{A})$.

Antes de provar o lema vamos provar a unicidade. Sejam $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F}(\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tais que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, e μ_1 é σ-finita ie $\Omega = \bigcup_{j \geq 1} E_j$ com $E_j \in \mathcal{A}$ e

Definição: $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{A}$, μ σ finita se $\exists$ $E_j \in \mathcal{A}$ e $\Omega = \bigcup_{j \geq 1} E_j$ com $\mu(E_j) < \infty$

$\mu_1(E_j) = \mu_2(E_j) < \infty$. Fixa n e E_n.

Seja $B_n = \{ E \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ t.q. $\mu_1(E \cap E_n) = \mu_2(E \cap E_n) \}$

Nota que $\mu_i(E \cap E_n) < \infty$, $i = 1, 2$.

Por definição $B_n \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$.

Afirmação: $B_n = \mathcal{F}(\mathcal{A})$

1. $B_n \supseteq \mathcal{A}$ (trivial porque se $E \in \mathcal{A}$, então $E \cap E_n \in \mathcal{A}$ e $\mu_1(E \cap E_n) = \mu_2(E \cap E_n)$ já que as medidas coincidem na algebra, e portanto $E \in B_n$.

2. B_n é uma classe monótona.

Seja $A_j \in B_n$, $A_j \uparrow A$. $A \in B_n$?

Mas isto é trivial já que μ_1 e μ_2 são σ-aditivas em

$\mathcal{F}(A)$. Ora

$$\begin{array}{ccc} \mu_1(A_j \cap E_n) & = & \mu_2(A_j \cap E_n) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mu_1(A \cap E_n) & & = \mu(A \cap E_n) \end{array}$$

por definição de $A_j \in B_n$

e μ_1 e μ_2 são contínuas por baixo, logo

$\therefore A \in B_n$

$\therefore B_n$ é fechado para sequências crescentes.

Seja agora $B_j \in B_n$ e $B_j \downarrow B = \bigcap_{j \geq 1} B_j$

Como $B_j \in B_n$ sabemos que $\mu_1(B_j \cap E_n) = \mu_2(B_j \cap E_n)$.
Mas μ_1 e μ_2 são σ-aditivas, mas para concluir a continuidade por baixo vamos precisar de usar a σ-finitude de μ_1 e μ_2.

Ora $\mu_1(E_n) < \infty$, logo $\mu_1(B_j \cap E_n) < \infty$. O mesmo vale para μ_2.

Logo como

$$\begin{array}{ccc} \mu_1(E_n \cap B_j) & = & \mu_2(E_n \cap B_j) \\ \text{cont. por baixo} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mu_1(B \cap E_n) & & \mu_2(B \cap E_n) \end{array}$$

$$\therefore \mu_1(B \cap E_n) = \mu_2(B \cap E_n)$$

$\therefore B \in B_n$

Logo B_n é uma classe monótona

$B_n \supseteq \mathcal{A} \Rightarrow B_n \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \underset{\text{Lema}}{=\!=} \mathcal{F}(\mathcal{A})$.

Mas como $B_n \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$ resulta que $B_n = \mathcal{F}(\mathcal{A})$ //

Agora queremos ver que
$$\mu_1 = \mu_2 \text{ na } \sigma\text{-algebra } \mathcal{F}(\mathcal{A}).$$
Seja $A \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$. Logo $A \in B_n$, ie
$$\mu_1(A \cap E_n) = \mu_2(A \cap E_n).$$
Alem disso sabemos que μ_1 e μ_2 são σ-aditivas e $\bigcup_{n\geq 1} E_n = \Omega$. Agora queremos usar a continuidade por baixo, então temos de repetir o argumento anterior com
$$F_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \text{ em vez de } E_n \text{ pois agora } F_n \uparrow \Omega.$$
Vamos concluir que $\mu_1(A \cap F_n) = \mu_2(A \cap F_n)$ e pela continuidade por baixo vamos, tomando limite em n, concluir que
$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap \Omega) = \mu_2(A \cap \Omega) = \mu_2(A).$$

$$\therefore \mu_1 = \mu_2 \text{ em } \mathcal{F}(\mathcal{A}).$$

O que acabamos de provar resume-se no seguinte:

Partimos de $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ σ-aditiva.

Definimos $\pi^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que
$$\pi^*(A) = \inf_{\{A_j\}_j} \sum_{j\geq 1} \nu(A_j)$$

π^* é uma medida exterior

Introduzimos o conjunto dos mensuráveis $\mathcal{M}$.

Provamos que $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$ } vejam na prova que

e $\pi^* : \mathcal{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é σ-aditiva. } este resultado é geral !!!

π^* é uma extensão de ν

$\pi^* |_{\mathcal{F}(\mathcal{A})}$ é única se Ω é σ-finito ie se $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F}(\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$\mu_1 \equiv \mu_2$ em $\mathcal{A}$ e Ω μ_1 σ-finito ie

$\Omega = \dot{\bigcup\limits_{j \geq 1}} E_j$ com $E_j \in \mathcal{A}$ e $\mu_1(E_j) < \infty$ $\forall j$.

Então $\mu_1 = \mu_2$.

TEOREMA DE CARATHEODORY.

* $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$, não há exemplos em que a inclusão é estrita

* a σ-algebra $\mathcal{M}$ depende de π^* que depende de ν.

e portanto partindo de duas medidas ν e $\tilde{\nu}$ diferentes podemos obter $\mathcal{M}$ e $\tilde{\mathcal{M}}$ diferentes.

Agora vamos aplicar estes resultados para construir a medida de Lebesgue.

$\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{S}$ semi-álgebra dos intervalos.

Antes disso vamos provar o lema acima.

PROVA DO LEMA:

$\mathcal{F}(\mathcal{A})$ é uma classe monótona
$\mathcal{F}(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A}$ por definição
$\Big\} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Agora falta ver a outra inclusão, ie $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Para tal vamos provar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma σ-algebra e como $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A}$ resultará o que queremos.

Primeiro vamos provar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma álgebra.

Seja $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{G}_E = \{ F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : E \setminus F \text{ e } E \cap F \text{ e } F \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \}$$

Observa que se $E \in \mathcal{A}$ então $\mathcal{G}_E \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Para tal provamos que $\mathcal{G}_E \supseteq \mathcal{A}$ e é uma classe monótona.

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}_E$

Seja $A \in \mathcal{A}$. Queremos provar que $A \in \mathcal{G}_E$, ie

$$E \setminus A, \quad E \cap A \quad \text{e} \quad A \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Como $E \in \mathcal{A}$ e $A \in \mathcal{A}$ todos os conjuntos acima estão em $\mathcal{A}$ e portanto estão em $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. $\therefore A \in \mathcal{G}_E$

- $\mathcal{G}_E$ é uma classe monótona.

Sejam $A_k \uparrow A$, $A_k \in \mathcal{G}_E$, queremos provar que $A \in \mathcal{G}_E$.

Ora $A_k \in \mathcal{G}_E$, logo $E \setminus A_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $E \setminus A_k \downarrow E \setminus A$, logo

$E \setminus A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Analogamente $E \cap A_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $E \cap A_k \uparrow E \cap A$

$$\therefore E \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

e $A_k \setminus E \uparrow A \setminus E$ $\therefore A \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

i.e $A \in \mathcal{G}_E$.

Analogamente podemos concluir que $\mathcal{G}_E$ é fechado para sequências decrescentes. (verifique).

$\therefore \mathcal{G}_E$ é uma classe monótona!

$\therefore$ se $E \in \mathcal{A}$ então $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}_E$

Agora o mesmo vale para $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

↳ Vejamos:

Vamos provar que
- $\mathcal{G}_E$ é uma classe monótona
- $\mathcal{G}_E \supseteq \mathcal{A}$.

Seja então $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $A_k \in \mathcal{G}_E$, $A_k \uparrow A$.

Queremos ver que $A \in \mathcal{G}_E$.

Ora $E \setminus A_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$E \setminus A_k \downarrow E \setminus A$ $\therefore$ $E \setminus A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Da mesma forma $A \setminus E$ e $E \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

$\therefore \ A \in \mathcal{G}_E.$

O mesmo argumento vale para sequências decrescentes.

$\therefore \ \mathcal{G}_E$ é uma classe monótona.

Agora vamos ver que $\mathcal{G}_E \supseteq \mathcal{A}$.

Seja $A \in \mathcal{A}$. Então $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Falta ver que

$$E \setminus A,\ E \cap A \text{ e } A \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{A}). \boxed{*}$$

Mas $\mathcal{G}_A \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ então como $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ temos $\boxed{*}$ ✓

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma álgebra

1. $\Omega \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ✓
2. $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \implies E^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

porque $\forall \tilde{E} \in \mathcal{A}$ $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}_{\tilde{E}}$ e tomamos $\tilde{E} = \Omega$.

Como $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}_E$ logo $E \in \mathcal{G}_\Omega$

onde $\mathcal{G}_\Omega = \{F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : F^c, F, \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$

então $E^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

3. $E, F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ então $E \cap F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Mas $\mathcal{G}_E \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}_E$ o que nos diz que

$$E \cap F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Agora queremos provar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra.

ie $A_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Como $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma álgebra sabemos que

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

e $\bigcup_{j\geq 1}^{n} A_j \uparrow \bigcup_{j\geq 1} A_j$ e como $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é classe monótona

resulta que $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

$\therefore$ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma σ-algebra

Corolário: Uma classe monótona que contém uma algebra também contém a σ-algebra gerada pela álgebra.

Medidas completas

Def: Dado um espaço $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$

$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida

$\mathcal{C}$ classe de conjuntos (σ-algebra)

Dizemos que $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ é completo se

$\forall A \subseteq \Omega$, $A \subseteq \underset{\mathcal{C}}{\underset{\uparrow}{B}}$ com $\mu(B) = 0$ se tem $A \in \mathcal{C}$.

<u>obs</u> 1) Por monotonia de μ é óbvio que $\mu(A)=0$.

<u>obs</u> 2) Todas as medidas que são obtidas restringindo uma medida exterior μ^* à classe $\mathcal{M}$ (ie à classe dos conjuntos μ^* mensuráveis) são medidas completas. Vejamos:

Seja $A \subseteq \underset{\mathcal{M}}{\underset{\Uparrow}{B}}$ com $\mu^*(B)=0$. Queremos ver que $A\in\mathcal{M}$.

Ora primeira observação é que $\mu^*(A)=0$ (ver obs 1)

Por outro lado, todos os conjuntos E tq $\mu^*(E)=0$ são mensuráveis. Dado $A \subseteq \Omega$ tem-se:

$$\mu^*(A) \overset{\text{monotonia de } \mu^*}{\geqslant} \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A\setminus E) + \mu^*(\underbrace{A\cap}_{\subseteq E}\overline{E})$$

é a única desigualdade a provar

Seja $\mathcal{N}$ a família dos conjuntos nulos ie

$A \in \mathcal{N}$ sse $\exists\ B \in \mathcal{G}$ tq $A \subseteq B$ e $\mu(B)=0$.

Obs Dizer que $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ é completo é equivalente a dizer que $\mathcal{N}$ é um subconjunto de $\mathcal{C}$.

Vamos definir $\overline{\mathcal{C}} = \{ A \cup N : A \in \mathcal{C} \text{ e } N \in \mathcal{N} \}$

Afirmação $\overline{\mathcal{C}}$ é uma σ-álgebra.

Prova: Há três pontos a provar:

1. $\boxed{\Omega \in \overline{\mathcal{C}} \, ?}$

$\phi \subseteq \phi$ e $\mu(\phi) = 0$

$\therefore \phi \in \mathcal{N}$

Ora $\Omega = \Omega \cup \phi$

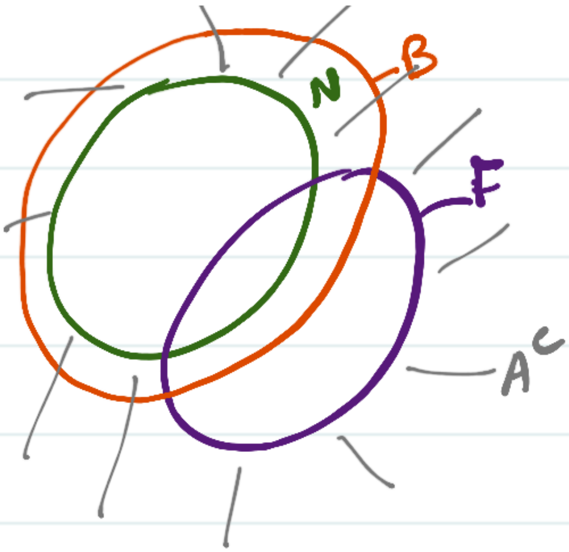
$\Omega \in \mathcal{C}$ porque $\mathcal{C}$ é σ-algebra

$\therefore \Omega \in \overline{\mathcal{C}}$

2. $\boxed{A \in \overline{\mathcal{C}} \Rightarrow A^c \in \overline{\mathcal{C}} \, ?}$

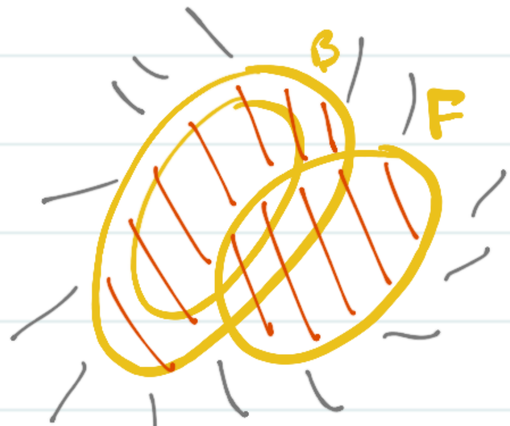
Se $A \in \overline{\mathcal{C}}$ então $A = F \cup N$ com $F \in \mathcal{C}$, $N \in \mathcal{N}$

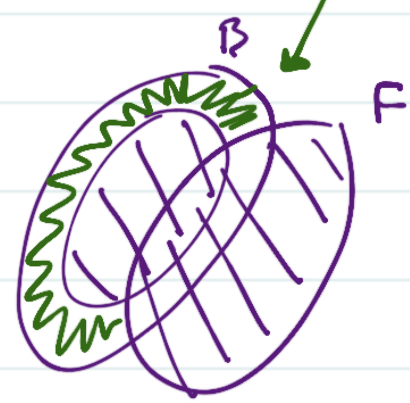
ie $N \subseteq B$, $B \in \mathcal{C}$ e $\mu(B) = 0$.



$A = F \cup N$

$\therefore \; A^c = (F \cup B)^c \cup \big(\underbrace{B \setminus (N \cup F)}\big)$





Repita os diagramas para ver a igualdade entre os conjuntos acima

Então $A^c = \underbrace{(F \cup B)^c}_{\in\, \mathscr{C}} \cup \big(\underbrace{B \setminus (N \cup F)}_{\in\, \mathcal{N}}\big)$ porque $B \setminus (N \cup F) \subseteq B$ e $\mu(B) = 0$.

$\therefore \; A^c \in \overline{\mathscr{C}}.$

(3) Se $A_j \in \overline{\mathscr{C}}$ então $\bigcup_{j \geq 1} A_j \in \overline{\mathscr{C}}$?

Se $A_j \in \overline{\mathscr{C}}$ então $A_j = F_j \cup N_j$ e $F_j \in \mathscr{C}$
$N_j \in \mathcal{N}$

Logo $\bigcup_{j \geq 1} A_j = \bigcup_{j \geq 1} (F_j \cup N_j)$

$$= \underbrace{\left(\bigcup_{j\geq 1} F_j\right)}_{\in\ \mathcal{C} \text{ porque } \mathcal{C} \text{ é } \sigma\text{-álgebra}} \cup \left(\bigcup_{j\geq 1} N_j\right)$$

$$\bigcup_{j\geq 1} N_j \subseteq \overbrace{\bigcup_{j\geq 1} B_j}^{\in\ \mathcal{C}}$$

$$\therefore \mu\left(\bigcup_{j\geq 1} B_j\right) \leq \sum_{j\geq 1} \mu(B_j) = 0$$

$$\therefore \bigcup_{j\geq 1} N_j \in \mathcal{N}$$

$$\therefore \bigcup_{j\geq 1} A_j \in \overline{\mathcal{C}}$$

$\overline{\mathcal{C}}$ é uma σ-algebra

Afirmação: $\overline{\mathcal{C}} \supseteq \mathcal{C}$

Isto é trivial pois $A \in \mathcal{C}$ então $A = \overbrace{A}^{\in\ \mathcal{C}} \cup \underbrace{\phi}_{\in\ \mathcal{N}}$

já que $\phi \subseteq \phi$ e $\mu(\phi) = 0$.

Lembre que $\mu: \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Agora vamos estender

Definição: Seja $\overline{\mu}: \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que se define em $A \in \overline{\mathcal{C}}$ da seguinte forma

$A = \underset{\in \mathcal{C}}{F} \cup \underset{\in \mathcal{N}}{N}$

$$\boxed{\overline{\mu}(A) = \mu(F)}$$

Afirmação: $\bar{\mu}$ está bem definida

Suponhamos que $A = F \cup N$ e que A tem duas
$= G \cup M$

representações distintas, com $F, G \in \mathcal{C}$ e $N, M \in \mathcal{N}$.

Queremos ver que $\bar{\mu}(A)$ não depende da representação ie

$$\mu(G) = \bar{\mu}(A) = \mu(F).$$

Ora $F \subseteq F \cup N = A = G \cup M$

$$\therefore \; F \subseteq G \cup M$$

$M \in \mathcal{N} \Rightarrow M \subseteq \underset{\mathcal{C}}{\underset{\Uparrow}{B}}$ e $\mu(B) = 0$

$$\therefore \; F \subseteq G \cup M \subseteq \underset{\mathcal{C}}{\underset{\Uparrow}{G}} \cup \underset{\mathcal{C}}{\underset{\Uparrow}{B}} \in \mathcal{C}$$

$$\therefore \; \mu(F) \underset{\text{monotonia}}{\leq} \mu(G) + \underset{0}{\underset{\parallel}{\mu(B)}} = \mu(G).$$

Por simetria, ie repetindo o argumento acima partindo de G vamos concluir que

$$\mu(G) \leq \mu(F)$$

Daqui resulta que $\mu(G) = \mu(F)$ ✓

$\bar{\mu}$ está bem definida.

Afirmação: $\bar{\mu}$ é σ-aditiva

Sejam $A_j \in \bar{\mathcal{C}}$ disjuntos e $A = \sum_{j \geq 1} A_j \in \bar{\mathcal{C}}$

Temos de provar que

$$\boxed{\bar{\mu}(A) = \sum_{j\geq 1} \bar{\mu}(A_j)}$$

$A \in \bar{\mathcal{C}}$ logo $A = F \cup N$ com $F \in \mathcal{C}$
$N \in \mathcal{N}$

$$\bar{\mu}(A) \overset{def}{=} \mu(F)$$

$$F \subseteq A = \sum_{j\geq 1} A_j$$

$A_j \in \bar{\mathcal{C}}$ logo
$A_j = F_j \cup N_j$ com $F_j \in \mathcal{C}$ e $N_j \in \mathcal{N}$
e $N_j \subseteq B_j$, $B_j \in \mathcal{C}$ e $\mu(B_j) = 0$.

$$A_j = F_j \cup N_j \subseteq F_j \cup B_j$$

e $\sum_{j\geq 1} A_j \subseteq \bigcup_{j\geq 1} F_j \cup B_j$

↳ agora não têm necessariamente de ser disjuntos

Então temos

$$\bar{\mu}(A) = \mu(F) \leq \sum_{j\geq 1} \mu(F_j \cup B_j)$$

$$\leq \sum_{j\geq 1} \mu(F_j) + \overset{0}{\cancel{\mu(B_j)}}$$

$$= \sum_{j\geq 1} \mu(F_j)$$

$$= \sum_{j\geq 1} \bar{\mu}(A_j)$$

Daqui resulta que $\bar{\mu}(A) \leq \sum_{j\geq 1} \bar{\mu}(A_j)$

Agora vamos provar a desigualdade contrária.

Ora

$$\sum_{j\geq 1} \bar{\mu}(A_j) \xlongequal[\text{de } \bar{\mu}]{\text{definição}} \sum_{j\geq 1} \mu(F_j)$$

os A_j's são dois a dois disjuntos

$F_j \subseteq A_j$

os F_j's também são dois a dois disjuntos (verifique)

σ-aditividade de μ

$$= \mu\left(\sum_{j\geq 1} F_j\right)$$

Mas $\sum_{j\geq 1} F_j \subseteq A$ e $A \in \bar{\mathcal{E}}$, $A = \underset{\in \mathcal{E}}{F} \cup N \subseteq F \cup B$

$N \subseteq B \in \mathcal{E}$ com $\mu(B) = 0$

então $\sum_{j\geq 1} F_j \subseteq F \cup B$

Daqui resulta que $\mu\left(\sum_{j\geq 1} F_j\right) \overset{\text{monotonia}}{\leq} \mu(F \cup B)$

$$\leq \mu(F) + \underset{0}{\mu(B)}$$

$$= \mu(F) \xlongequal{\text{def}} \bar{\mu}(A)$$

$$\therefore \sum_{j\geq 1} \bar{\mu}(A_j) \leq \bar{\mu}(A)$$

$\therefore$ $\bar{\mu}$ é σ- aditiva

Afirmação: $\bar{\mu}$ é uma extensão de $\mu : \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}_+$
$\bar{\mu} : \bar{\mathcal{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$.

Ora queremos ver que se $A \in \mathcal{C}$ então
$\bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

Observa que

$$A = A \cup \phi \quad ; \quad \phi \subseteq \underset{\in \mathcal{C}}{\phi} \text{ e } \mu(\phi) = 0$$

$$\therefore \bar{\mu}(A) = \mu(A)$$

$\therefore$ $\bar{\mu}$ é uma extensão de μ.

Afirmação $\bar{\mu}$ é única.

Sejam μ e ν duas medidas definidas numa σ- álgebra $\mathcal{G}$ e que coincidem numa σ-álgebra $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$.
Afirmamos que

$$\boxed{\bar{\mathcal{C}}_\mu = \bar{\mathcal{C}}_\nu} \, . \quad (*)$$

Se $A \in \bar{\mathcal{C}}_\mu$ (observe que um completamento depen de sempre da medida), então

$$A = \underset{\mathcal{C}}{\underset{\cap}{F}} \cup \underset{B}{\underset{\cap}{N}} \quad \text{com } B \in \mathcal{C} \text{ e } \mu(B) = 0.$$

Observa que $\nu(B) = \mu(B)$ (porque as medidas coincidem em $\mathcal{C}$) e portanto $\nu(B) = 0$.
Assim resulta que $A \in \overline{\mathcal{C}}_\nu$
Analogamente obtemos que se $A \in \overline{\mathcal{C}}_\nu$ então $A \in \overline{\mathcal{C}}_\mu$.
Daqui provamos (*)

Seja agora $B \in \overline{\mathcal{C}}_\mu$. Queremos provar que

$$\bar{\mu}(B) = \bar{\nu}(B).$$

Como $B \in \overline{\mathcal{C}}_\mu$ então $B = \underset{\mathcal{C}}{\underset{\cap}{E}} \cup \underset{\mathcal{N}}{\underset{\cap}{N}}$ ie $N \subseteq H \in \mathcal{C}$

$$\underset{\nu(H)}{\underset{\shortparallel}{\mu(H)}} = 0$$

$$\text{Então} \quad \bar{\mu}(B) = \mu(E) \overset{\mu = \nu \text{ em } \mathcal{C}}{=} \nu(E) \underset{\text{mon.}}{\underset{E \subseteq B}{\leq}} \nu(B)$$

$$\text{Mas} \quad \nu(B) = \nu(E \cup N) \leq \nu(E \cup H) \leq \nu(E) + \nu(H)$$
$$= \mu(E) + \mu(H)$$
$$= \mu(E) = \bar{\mu}(B)$$

$\therefore$ a extensão é única.

Afirmação: $(\Omega, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mu})$ é completo.

Isto mostra que é sempre possível completar a medida

Ora temos de provar que
$A \subseteq B \in \overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mu}(B) = 0$ então $A \in \overline{\mathcal{C}}$.

Seja então $A \subseteq B$ e $B \in \overline{\mathcal{C}}$. Logo

$$B = \underset{\in \mathcal{C}}{F} \cup \underset{\in \mathcal{N}}{N} \quad \text{i.e.} \quad N \subseteq G,\ G \in \mathcal{C},\ \mu(G) = 0$$

Temos de provar que $A = F' \cup N'$ onde $F' \in \mathcal{C}$ e $N' \in \mathcal{N}$.

Ora $A \subseteq B = F \cup N \subseteq \underbrace{F \cup G}_{\in \mathcal{C}}$

$$\mu(F \cup G) \leq \mu(F) + \underset{0}{\mu(G)} = \mu(F) = \overline{\mu}(B) = 0$$

$\therefore A = A \cup \phi$

$A \subseteq F \cup G \in \mathcal{C}$ e $\mu(F \cup G) = 0$

$\therefore A \in \mathcal{N}$ e $\phi \in \mathcal{C}$

$\therefore A \in \overline{\mathcal{C}}$

$\therefore (\Omega, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mu})$ é completo

Então:

Observa que partimos de $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$\mathcal{C}$ σ-álgebra

e definimos $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

- $\overline{\mu}$ coincide com μ na σ-algebra
- $\overline{\mu}$ é única
- $\overline{\mu}$ é completa.

E esta é a nossa última extensão!

Agora vamos ver como definir a medida de Lebesgue!

A Medida de Lebesgue

Agor vamos ver como usar os teoremas de extensão para construir a chamada medida de Lebesgue que estende à σ-algebra gerada pelos intervalos, a noção de comprimento.
Lembre que o teorema de caratheodory diz que se temos uma medida definida na algebra então podemos estendê-la de maneira única à σ-algebra gerada por essa álgebra.

$\mathcal{S}$ = semi-algebra dos intervalos

$$\mathcal{S} = \{ \phi, \mathbb{R}, (a,b], a,b \in \mathbb{R}, a<b, (-\infty, b], (a, +\infty) \}$$

é uma semi-álgebra. (verifique)
Sejà

$$\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}_+$$

$\mu(\phi) = 0$
$\mu(\mathbb{R}) = +\infty$
$\mu(a,b] = b-a$
$\mu(-\infty, b] = +\infty$
$\mu(a,+\infty) = +\infty$

Queremos ver que se $A \in \mathcal{S}$, $A_j \in \mathcal{S}$ tq $A = \sum_{j \geq 1} A_j$ então

$$\mu(A) = \sum_{j \geq 1} \mu(A_j) \quad (*)$$

Este é o objetivo agora, ie provar que μ é σ-aditiva.

Já vimos que se μ é aditiva e está definida em $\mathcal{S}$, então μ pode ser estendida de maneira única a $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, ie a algebra gerada por $\mathcal{S}$, vamos denotar essa extensão por ν.

Queremos provar ⊛. Logo como ν é uma extensão de μ, basta ver que

$$\boxed{\nu(A) = \sum_{j\geq 1} \nu(A)}$$

Repara que ν está defini a na ˥ b , lo faz sentido escrever

$$\nu(\underbrace{(a,b] \cup (c,d]}_{\text{é um}})$$

nJo a āl b

mas noo da ⁻ ˥ eb

e este é o motivo pelc ν a ν.

$\boxed{1}$ $A = \sum_{j\geq 1} A_j \supseteq \sum_{j=1}^{n} A_j$ þ a al um n.

$\cap$

$\mathcal{A}(\mathcal{S})$ (na há arantia estar na semi-álgebra)

Por monotonia de ν.

$$\nu(A) \geq \nu\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j)$$

ν é aditiva

esta igualdade vale para todo n, logo tomando limite em n obtemos $\quad \nu(A) \geq \sum_{j\geq 1} \nu(A_j)$

Falta provar que $\quad \nu(A) \leq \sum_{j\geq 1} \nu(A_j)$

Assumimos agora que $A = (a,b]$. Como $A_j \subseteq A$, então A_j tem que ser da forma $A_j = (a_j, b_j]$.
Logo temos de provar que

$$b-a \leq \sum_{j\geq 1} (b_j - a_j) \quad \text{com} \quad A = \sum_{j\geq 1} A_j$$

Seja $\varepsilon > 0$

$$\begin{array}{c} (a,b] \\ \cup\!\!\mid \\ \underbrace{[a+\varepsilon, b]}_{\text{compacto}} \end{array} = \sum_{j\geq 1} (a_j, b_j] \subseteq \bigcup_{j\geq 1} \underbrace{(a_j, b_j + \varepsilon/2^j)}_{\substack{\text{não são} \\ \text{mais} \\ \text{disjuntos}}}$$

Logo temos um compacto que pode ser coberto por uma coleção de conjuntos e sabemos que podemos extrair uma sub-cobertura finita, ie

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} (a_{j_k}, b_{j_k} + \varepsilon/2^{j_k})$$

Agora queremos calcular a medida destes conjuntos e como sabemos fazê-lo para conjuntos da forma $(a,b]$

vamos então fazer o seguinte:

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} (a_{j_k}, b_{j_k} + \varepsilon/2^{j_k}) \subseteq (a_{j_k}, b_{j_k} + \varepsilon/2^{j_k}]$$

$$\cup\!\!\!\mid \quad (a+\varepsilon, b]$$

Logo, por monotonia,

$$\nu(a+\varepsilon, b] \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{m} (a_{j_k}, b_{j_k} + \varepsilon/2^{j_k}]\right)$$

$$\underset{\substack{\text{sub-aditividade}\\ \text{da função}\\ \text{aditiva def}\\ \text{na álgebra}}}{\leq} \sum_{k=1}^{m} \nu(a_{j_k}, b_{j_k} + \varepsilon/2^{j_k}]$$

$$\therefore \; b-a-\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m} (b_{j_k} - a_{j_k} + \varepsilon/2^{j_k})$$

majoro pela soma de todos os intervalos que tinhamos no início

$$\leq \sum_{j\geq 1} \left(b_j - a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$$

$$= \sum_{j\geq 1} (b_j - a_j) + \varepsilon$$

Como isto vale para todo ε provamos que

$$b-a \leq \sum_{j\geq 1} (b_j - a_j)$$

(Ver a prova em $d=2$ no Taylor pag 71)

Lembre que queremos provar

$$\nu(A) \leq \sum_{j\geq 1} \nu(A_j) \quad (*)$$

$\forall A \in \mathcal{S}$ e provamos para $A = (a,b]$.

Para provarmos isto no caso geral, seja $A \in \mathcal{S}$ e $E_n = (-n,n]$. $E_n \uparrow \mathbb{R}$

- $A \cap E_n \in \mathcal{S}$ porque $A, E_n \in \mathcal{S}$. {$A \cap E_n$ tem que ser um int. finito}
- Logo $(*)$ vale para $A \cap E_n$.

Af: $\nu(A) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A\cap E_n)$ (verifique analisando todas as possibilidades para $A \in \mathcal{S}$)

Af $A \cap E_n = \sum_{j\geq 1} \underbrace{A_j \cap E_n}_{\in \mathcal{S}}$

Logo $(*)$ diz que

$$\nu(A\cap E_n) = \sum_{j\geq 1} \nu(A_j \cap E_n)$$

$$\leq \sum_{j\geq 1} \nu(A_j).$$

Como vale para todo n, temos:

$$\therefore \lim_{n} \nu(A\cap E_n) \leq \sum_{j\geq 1} \nu(A_j)$$

$$\therefore \nu(A) \leq \sum_{j\geq 1} \nu(A_j)$$

$\therefore \nu$ é σ-aditiva na semi-álgebra e portanto é σ-aditiva na algebra gerada pela semi-álgebra

Se $E_n = (-n, n]$, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} E_n$

e $\underset{\mu(E_n)}{\underset{\shortparallel}{\nu(E_n)}} = 2n < \infty$ $\therefore$ ν é σ-finita

e pelo Teorema de extensão sabemos que a extensão de ν à σ-algebra gerada pelos intervalos, é unica.

Vamos agora ver uma maneirà alternativa de provar que μ é σ-aditiva (a aditividade pode ser vista no Taylor p.70)
Seja agora para k fixo

$$\mu_k(A) = \nu(A \cap (-k, k]).$$

$\boxed{1}$ μ_k é σ-aditiva.

ν esta definida na algebra $A(\mathcal{S})$. Observa que μ_k é finita pois $\mu_k(\Omega) = \nu((-k, k]) = 2k < \infty$.

Por um lema sabemos que para provar a σ-aditividade de μ_k basta provar a continuidade por cima no ϕ. Sejam $A_j \downarrow \phi$
$A_j \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$

Queremos ver que $\mu_k(A_j) \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

Fixa j.

Ora $A_j \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ logo A_j é uma união finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$ ie de intervalos.

Vamos supôr por redução ao absurdo que $\mu_K(A_j) \underset{j \to +\infty}{\not\to} 0$
ou seja

$$\exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mu_K(A_j) \geq \delta \quad \forall j.$$

Vamos usar a seguinte propriedade topológica de $\mathbb{R}$.

Se K_j são compactos em $\mathbb{R}$

$$K_j \downarrow \phi \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, j_0 \text{ tal que}$$

$$\bigcap_{j \geq 1} K_j = \phi \qquad\qquad K_j = \phi \quad \forall j \geq j_0$$

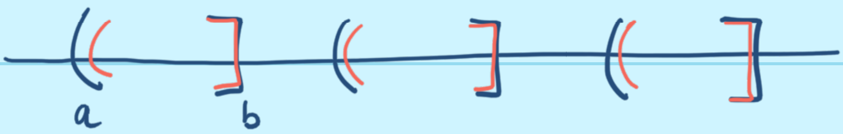
<u>1º passo</u> Começamos com o n nto $-1 \in -(\ )$.

Então A_1 é uma união d' nl finita de intervalos

$$A_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (a_{1j}, b_{1j}]$$

e agora considero C_1 dado pela união de intervalos mais pequenos e contidos em A_1

$$C_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (a_{1j} + \varepsilon_1, b_{1j}]$$



Notação: dado $E \subseteq \Omega$, $\overline{E}$ é a interseção de todos os fechados que contêm E.

com ε_1 suficientemente pequeno de tal forma que: $a_{1j} + \varepsilon_1 < b_{1j}$. Desta forma $C_1 \subseteq \overline{C_1} = K_1 \subseteq A_1$, e $\mu_K(A_1 \setminus C_1) < \delta$ a tão pequeno quanto queiramos.

Observa que $\mu_K(A_1 \cap C_1) \geq$?

Ora $\delta \leq \mu_k(A_1) = \mu_k(A_1 \cap C_1) + \mu_k(A_1 \setminus C_1)$
$\leq \mu_k(A_1 \cap C_1) + \delta a$

$\therefore \boxed{\mu_k(A_1 \cap C_1) \geq \delta(1-a).}$

<u>2º Passo</u> Vamos agora construir C_2 com $C_2 \subseteq A_2$ e $C_2 \subseteq C_1$ i.e. $C_2 \subseteq A_2 \cap A_1$ porque queremos encontrar conjuntos decrescentes.

Ora $\mu_k(A_2 \cap C_1) \geq$?

Repetindo o argumento que vimos acima, temos:

$$\delta \leq \mu_k(A_2) = \mu_k(A_2 \cap C_1) + \mu_k(\underbrace{A_2 \setminus C_1}_{\subseteq A_1 \setminus C_1})$$

$\subseteq A_1 \setminus C_1$ porque $A_2 \subseteq A_1$

e $\mu_k(A_1 \setminus C_1) \leq \delta a$

$\therefore \mu_k(A_2 \cap C_1) \geq \delta(1-a) > 0$ (se $a<1$).

Como a medida é positiva podemos encontrar C_2 tal que $C_2 \subseteq \overline{C_2} = K_2 \subseteq \underbrace{A_2 \cap C_1}_{\in \mathcal{A}(\mathcal{J})}$ tal que

$\sum_{j=1}^{n_2''} (a_{2j}+\varepsilon_2, b_{2j}]$ $\quad \mu_k((A_2 \cap C_1) \setminus C_2) \leq \delta a^2$ $\quad A_2 \cap C_1 = \sum_{j=1}^{n_2} (a_{2j}, b_{2j}]$

(isto é uma escolha i.e. C_2 é escolhido para ter a propriedades acima) <u>obs</u> $C_2 \subseteq C_1$.
$\overline{C_2} \subseteq A_2$

Vamos agora provar por indução.

Suponhamos que já temos definidos $C_1, C_2, \dots C_m$ tal que $C_j \subseteq A_j \cap C_{j-1}$ $\forall j = 1, \dots, m$ e

$$\mu_k\left((A_j \cap C_{j-1}) \setminus C_j\right) \leq \delta a^j$$

e agora vamos construir o conjunto C_{m+1}.
Ora queremos que o conjunto satisfaça:

$$C_{m+1} \subseteq C_m$$
$$C_{m+1} \subseteq A_{m+1}$$
$$\therefore C_{m+1} \subseteq C_m \cap A_{m+1}$$

Então

$$\delta \leq \mu_k(A_{m+1}) = \mu_k(A_{m+1} \cap C_m) + \underbrace{\mu_k(A_{m+1} \setminus C_m)}$$

precisamos de uma cota para isto

<u>Obs</u>: $\mu_k(A_{m+1} \setminus C_m) := \beta_m$

$$\leq \mu_k(A_m \setminus C_m)$$ porque $A_{m+1} \subseteq A_m$ (lembre que ca- $\downarrow$ os de $A_j \downarrow$)

$$= \mu_k((A_m \setminus C_m) \cap C_{m-1}) + \mu_k((A_m \setminus C_m) \setminus C_{m-1})$$

$$(A_m \setminus C_m) \cap C_{m-1} = (A_m \cap C_m^c) \cap C_{m-1}$$
$$= (A_m \cap C_{m-1}) \setminus C_m$$

$C_m \subseteq C_{m-1}$

$$= \underbrace{\mu_k\left((A_m \cap C_{m-1}) \setminus C_m\right)}_{\leq \delta a^m \text{ (hipótese de indução)}} + \underbrace{\mu_k(A_m \setminus C_{m-1})}_{\beta_{m-1}}$$

Podemos iterar o argumento para obter:

$$\beta_m \leq \delta a^m + \beta_{m-1}$$
$$\leq \delta a^m + \delta a^{m-1} + \ldots + \delta a^2 + \underset{\shortparallel}{\beta_1}$$

$$\mu(A_2 | C_1)$$
$$\leq \mu(A_1 | C_1) \leq \delta a$$

$$\therefore \beta_m \leq \delta a^m + \ldots + \delta a^2 + \delta a$$
$$= \delta(a + a^2 + \ldots + a^m)$$

Destas contas resulta que $\mu_k(A_{m+1} \cap C_m)$
$$\geq \delta - \beta_m$$
$$= \delta(1 - a - a^2 - \ldots - a^m) > 0 \text{ se}$$
$a = 1/2$ por exemplo

Então, como

$$A_{m+1} \cap \underset{\hat{A}(\mathcal{S})}{\overset{\overset{A(\mathcal{S})}{\cup\!\!\!\!\shortmid}}{C_m}} \in A(\mathcal{S}) \quad \text{e} \quad \mu_k(A_{m+1} \cap C_m) > 0$$

logo

o conjunto $A_{m+1} \cap C_m$ é uma união finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$ e portanto $\exists\, C_{m+1}$ tq

$$C_{m+1} \subseteq \overline{C_{m+1}} \subseteq A_{m+1} \cap C_m$$ e podemos escolher C_{m+1} com medida μ_k muito próxima da de $A_{m+1} \cap C_m$ ie

$$\mu_k((A_{m+1} \cap C_m) \setminus C_{m+1}) \leq \delta a^{m+1}$$

Ora temos então

$$C_j \subseteq A_j$$
$$C_j \supseteq C_{j+1} \supseteq C_{j+2} \ldots$$

e $\overline{C}_j \subseteq A_j$

$\overline{C}_j \supseteq \overline{C}_{j+1} \supseteq \overline{C}_{j+2} \dots$

$\bigcap_{j\geq 1} \overline{C}_j = \phi$ (pois $\bigcap_{j\geq 1} \overline{C}_j \subseteq \bigcap_{j\geq 1} A_j = \phi$)

Mas $\forall_j \; \mu_k(C_j) > 0$ logo $C_j \neq \phi$

$\therefore \overline{C}_j \neq \phi$

mas $\bigcap_{j\geq 1} \overline{C}_j = \phi$

Contradição ∇

∇ Acabamos de provar que μ_k que é a restrição de ν ao conjunto $(-k,k]$ é σ-aditiva, e agora vamos ter de provar que μ é σ-aditiva.

① σ-aditividade em $\mathcal{S}$

Seja $A = (a,b]$ e $A = \sum_{j\geq 1} A_j \subseteq (-k,k]$ para k suf grande.

Ambos A e A_j têm de estar contidos em $(-k,k]$ para k muito grande

Ora $\mu(A) \underset{\text{para } k \text{ suf grande}}{=} \mu(A \cap (-k,k]) \overset{\text{def}}{=} \mu_k(A)$

$$= \mu_k\left(\sum_{j\geq 1} A_j\right)$$

$$\underset{\sigma\text{-aditividade de } \mu_k}{=} \sum_{j\geq 1} \mu_k(A_j)$$

$$= \sum_{j\geq 1} \mu(A_j \cap (-k,k])$$

$$= \sum_{j\geq 1} \mu(A_j)$$

Falta agora verificar para os outros tipos de elementos
Suponhamos que

$$A =]-\infty, b] \qquad A = \sum_{j \geq 1} A_j \text{ e } \mu(A) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j)?$$

Observa que $\nu(A) = +\infty$.

Seja $k \geq 1$, então
$$\sum_{j\geq 1} \mu(A_j) \geq \sum_{j \geq 1} \mu(A_j \cap (-k,k]))$$
$$= \sum_{j\geq 1} \mu_k(A)$$
$$\underset{\substack{\sigma\text{-aditividade}\\ \text{de } \mu_k}}{=} \mu_k(A) = \mu(A \cap (-k,k])$$

$$= \mu((-\infty, b] \cap (-k,k])$$
$$\underset{k \geq b}{=} \mu((-k,b]) = b+k$$

isto vale para todo $k \geq b$, logo

$$\sum_{j\geq 1} \mu(A_j) \geq b+k \qquad \forall k$$

$$\therefore \sum_{j \geq 1} \mu(A_j) = +\infty.$$

Fazemos agora o mesmo tipo de argumento para os restantes tipos de conjuntos e provamos assim que μ é σ-aditiva em $\mathcal{S}$, na semi-álgebra.
Ora assim já sabemos (por um teorema geral que já provamos) que $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que estende μ

também é σ-aditiva na álgebra gerada pela semi-álgebra.

$$\mathcal{S} = \{\phi, \mathbb{R}, (a,b], (-\infty, b], (a, +\infty)\} \quad (*)$$

$$a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$$

λ = medida de Lebesgue

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[d, "\text{estendemos a}"'] \\ \mathcal{A}(\mathcal{S}) \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda^*"'] \\ \mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathcal{S}) \arrow[d] \\ \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$: σ-algebra (a extensão aqui é única)

$\mathcal{M}$: conj. mensuráveis.

$\boxed{\mathcal{F} = \sigma(\text{abertos})}$ ie a σ-algebra gerada por (*) coincide com a σ-al ebra ada pe a l de $\mathbb{R}$. (ver o Lema pag 43 do Taylor)

verifique

A σ-álgebra gerada pelos abertos é a chamada σ-álgebra de Borel. Aqui, e ao longo do curso vamos representá-la por $\mathcal{B}$. (em dimensão d maior do que 1 representamos por $\mathcal{B}^d$)

Ora nós então, pelo teorema de extensão, sabemos estender λ à σ-algebra dos borelianos ie a $\mathcal{B}$.

Mas usando a medida exterior π^* nós conseguimos estender λ ao conjunto dos mensuráveis $\mathcal{M}$ que contém $\mathcal{F}$.

Também já vimos que é possível estender λ de uma σ-algebra ao completamento e sabemos fazer esta extensão:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{F}} \\
\mu & & \nu & & \| & & \uparrow \\
 & & & & \mathcal{F}(\mathcal{S}) & & \\
 & & & & \| & & \\
 & & & & \mathcal{M}_{\pi^*} & &
\end{array}
$$

a medida que obtemos neste passo final é completa.

O que vamos ver agora é que o completamento de $\mathcal{F}$ ie $\overline{\mathcal{F}}$ coincide com $\mathcal{M}$.

Afirmação: $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{M}$

Quando queremos provar igualdades entre conjuntos já sabemos que há dois passos:

1) $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{M}$ e 2) $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$

1 Seja $A \in \overline{\mathcal{F}}$ queremos ver que $A \in \mathcal{M}$. Se $A \in \overline{\mathcal{F}}$ então

$$A = F \cup N \qquad F \in \mathcal{F}$$

$$N \in \mathcal{N} \quad \text{ie } N \subseteq B,\ B \in \mathcal{F}\ \mu(B) = 0$$

Para terminar, basta provar que $F \in \mathcal{M}$ e $N \in \mathcal{M}$.

(Ora lembre que $\mathcal{M}$ é uma σ-algebra, em particular é fechado para uniões finitas)

Como $\mathcal{M}$ é uma σ-algebra então $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}$. Logo, como

$F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow F \in \mathcal{M}$.

- $N \in \mathcal{M}$? seja $E \subseteq$ _ . Já sabemos que é sempre verdade que

$$\pi^*(E) \leq \pi^*(E \cap N) + \pi^*(E \setminus N)$$

isto é sempre verdade porque $E \subseteq (E \cap N) \cup (E \setminus N) \cup \phi \cup \ldots$ e pela sub σ- aditividade das medidas exteriores)

- Falta provar a desigualdade contrária.

Ora

$$\pi^*(E \cap N) + \pi^*(E \setminus N) \leq \pi^*(N) + \pi^*(E)$$
$$\leq \pi^*(B) + \pi^*(E)$$
$$= \underbrace{\mu(B)}_{=0} + \pi^*(E) = \pi^*(E)$$

$\therefore \overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{M}$

aqui não usamos a expressão de π^* é geral

Agora provemos que $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$

Seja $A \in \mathcal{M}$ queremos ver que $A \in \overline{\mathcal{F}}$ ie

$A = F \cup N$ com $F \in \mathcal{F}$

$N \subseteq B \in \mathcal{F}$ e $\mu(B) = 0$.

$$\boxed{\text{Vamos supôr primeiro que } \pi^*(A) < \infty}$$

Lembre a definição de π^*.

Então $\forall k \geq 1 \ \exists A_{k,j} \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ t.q. $A \subseteq \bigcup_{j \geq 1} A_{k,j}$ e

$$\pi^*(A) \leq \sum_{j \geq 1} \nu(A_{k,j}) \leq \pi^*(A) + \frac{1}{2^k}$$

def de ínfimo

Ora se $F_k = \bigcup_{j \geq 1} A_{k,j}$ então $F_k \in \mathcal{F}$ porque $\mathcal{F}$ é uma σ-algebra.

$\therefore\ F := \bigcap_{k \geq 1} F_k \in \mathcal{F}$, $\underset{\forall k}{F_k \supseteq A}$ e portanto $\bigcap_{k \geq 1} F_k \supseteq A$.

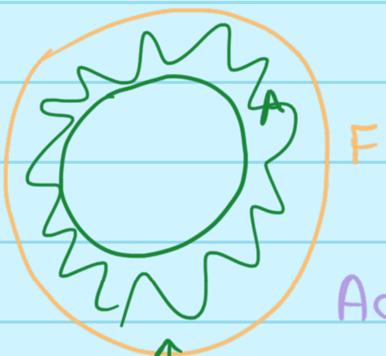
Logo $\pi^*(A) \leq \pi^*\Big(\overbrace{\bigcap_{k \geq 1} F_k}^{F}\Big) \underset{\text{monotonia de } \pi}{\leq} \pi^*(F_k) \leq \sum_{j \geq 1} \nu(A_{j,k})$

$\leq \pi^*(A) + \frac{1}{2^k}$

Como este resultado vale para todo o k obtemos

$$\pi^*(A) \leq \pi^*(F) \leq \pi^*(A)$$

Observa que $F \in \mathcal{F}$, $F \supseteq A$ e $\pi^*(F) = \pi^*(A)$.



Nós queremos provar que

$$A = \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathcal{F}}}{B} \cup N$$

Acabamos de encontrar um conjunto $F \in \mathcal{F}$ só que $F \supseteq A$ e queremos um menor do que A.

Observa que

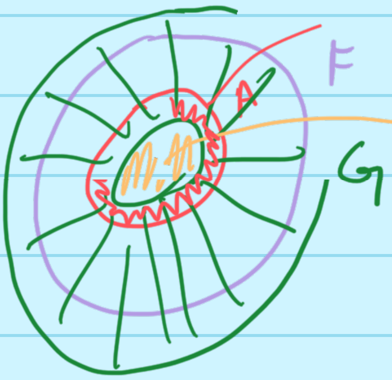
$$\pi^*(\underline{F \setminus A}) = \pi^*(F) - \pi^*(A)$$

(isto é sempre verdade porque $A \subseteq F$ e $\pi^*(A) < \infty$).

Logo $\pi^*(F \setminus A) = 0$.

Se repetir os a a o argumento que fizemos antes para A ($\pi^*(A)<\infty$) no a o anel $F \setminus A$ (e $\pi^*(F\setminus A) = 0 < \infty$) então encontrar ∃ 1 . $\in \mathfrak{F}$ tq. $F\setminus A \subseteq G$ e $\pi^*(G) = 0$ (verifique r setindo o argumento acima).

ora $A = \underbrace{(F\setminus G)}_{\substack{\| \\ F\cap\, {}^c \in \mathfrak{F}}} \cup (A \cap G)$ $\quad \hookrightarrow \subseteq G$, $G \in \mathfrak{F}$, $\pi^*(G) = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mu(G)$



$\therefore A \in \overline{\mathfrak{F}}$

Com isto provamos que $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$

$$\therefore \mathcal{M} = \overline{\mathfrak{F}}$$

Observação Até aqui vimos que $A \in \mathcal{M}$ e $\pi^*(A) < \infty \Rightarrow A \in \overline{\mathfrak{F}}$.
Vamos agora tirar a hipótese de que $\pi^*(A) < \infty$.

Assumimos então que π^* é σ-finita ie

$$\Omega = \bigcup_{j \geq 1} E_j, \quad E_j \in A(\mathcal{S}) \text{ e } \pi^*(E_j) < \infty \ \forall j.$$

Seja $F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j \in A(\mathcal{S})$ e $\pi^*(A \cap F_k) \leq \pi^*(F_k) = \pi^*\left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right)$
$\leq \sum_{j=1}^{n} \pi^*(E_j)$
$< \infty$.

Logo pelo que já provamos antes, temos $A \cap F_k \in \overline{\mathfrak{F}}$

Como $\overline{\mathcal{F}}$ é uma σ-álgebra, $\displaystyle\bigcup_{k\geq 1} A\cap F_k \in \overline{\mathcal{F}}$

$$\bigcup_{k\geq 1} A\cap F_k = A \quad \text{porque} \quad \bigcup_{k\geq 1} F_k = \bigcup_{j\geq 1} E_j = \Omega$$

$\therefore A \in \overline{\mathcal{F}}$ ✓

Observa que na prova acima consideramos um conjunto $A \in \mathcal{U}$ e conseguimos encontrar $F \in \mathcal{F}$ tq $F \supseteq A$ e

$$\pi^*(A) = \pi^*(F).$$

Ou seja é possível aproximar o conjunto A por um conjunto da σ-algebra e que tem a mesma medida exterior de A.

Agora vamos ver o seguinte teorema que nos permite fazer uma aproximação por conjuntos da algebra mas pagando um preço menor do que ε.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ e $\mu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

__Teorema__: Se $A \in \mathcal{F}$ com $\mu(A) < \infty$, para todo $\varepsilon > 0$ $\exists\, B \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(A \Delta B) < \varepsilon.$$

__Prova__: Seja $A \in \mathcal{F}$ e lembre que $\mu(A) < \infty$.

Na prova da extensão que já vimos atrás, sabemos que

$$\pi^*(A) = \inf_{\substack{\{A_j\} \\ A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} A_j}} \sum_{j\geq 1} \nu(A_j)$$

ν é a medida def na álgebra

A meo. a μ é obtid por restrição de π^* a $\mathcal{F}$.

$\therefore \mu(A) < \infty$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{A_i\}_{i \geq 1}$ tq $A_i \in \mathcal{A}$ $\quad A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i$ e

$$\pi^*(A) \leq \sum_{i \geq 1} \nu(A_i) \leq \underset{\mu(A)}{\overset{\shortparallel}{\pi^*(A)}} + \varepsilon \quad \boxed{*}$$

$\|$

$\mu(A)$ porque $A \in \mathcal{C}$ e $\mu = \pi^*|_{\mathcal{F}}$

logo $\displaystyle\sum_{i \geq 1} \nu(A_i) \leq \pi^*(A) + \varepsilon < \infty$

$\therefore \exists j$ tq $\displaystyle\sum_{i \geq j} \nu(A_i) \leq \varepsilon \quad \boxed{**}$

Seja $B = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{j} A_i$; $A_i \in \mathcal{A} \quad \therefore B \in \mathcal{A}$

Ora agora nota que $B \setminus A \subseteq \displaystyle\bigcup_{i \geq 1} A_i \setminus A$

logo $\displaystyle\pi^*(B \setminus A) \underset{\text{mon. de } \pi^*}{\leq} \pi^*\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i \setminus A\Big)$

$\pi^*(A) < \infty$

$$= \pi^*\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i\Big) - \pi^*(A)$$

$$\leq \sum_{i \geq 1} \pi^*(A_i) - \pi^*(A)$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{por } \boxed{*}$$

Por outro lado,

$$A \setminus B \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i \setminus B = \bigcup_{i \geq 1} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{j} A_i \subseteq \bigcup_{i > j} A_i$$

$$\therefore \pi^*(A \setminus B) \underset{\text{(sub. }\sigma\text{-ad.)}}{\leq} \pi^*\left(\bigcup_{i>j} A_i\right)$$

$$\leq \sum_{i>j} \pi^*(A_i) \leq \varepsilon \quad \text{por } \boxed{**}$$

$$\therefore \pi^*(A \Delta B) \leq 2\varepsilon.$$

$$\therefore \mu(A \Delta B) \leq 2\varepsilon$$

(*) $\pi^* = \nu$ em $\mathcal{A}$.

$\pi^* = \mu$ em $\mathcal{F}$.

Observação: Se Ω é σ-finito com respeito a μ (ie $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} E_i$, $E_i \in \mathcal{A}$ e $\mu(E_i) < \infty$ $\forall i$) então já sabemos que $\underset{\sigma\text{alg}}{\mu : \mathcal{F}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ do teorema anterior pode ser estendida a $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ de forma única.

Logo, se repetirmos os argumentos que usamos no teorema anterior para $\overline{\mathcal{F}}$ então podemos concluir que

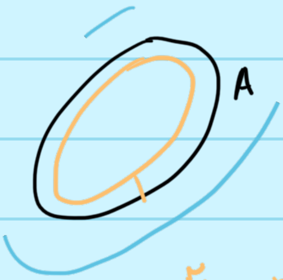
$\forall A \in \overline{\mathcal{F}}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B \in \mathcal{A}$ tq $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.

Agora vamos considerar Ω como sendo um espaço topologico.

Ω, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é a σ-algebra de Borel ie a menor σ-álgebra que contém os abertos de Ω.

Definição: (Medida regular) Uma medida $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

Com $\mathcal{F} \supseteq$, σ b diz-se regular se $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall A \in \mathcal{F}$
$\exists$ F fechado e aberto tal que $F \subseteq A \subseteq G$ e
$(-|F) \leq \varepsilon$



Obs q

1. Acima não pedimos que $\mu(A) < \infty$, então na propriedade mesmo quando $\mu(A) = +\infty$ vamos ter de aproximar o conjunto A por um aberto e por um fechado.

2. acima pedimos que $\mu(G|F| < \varepsilon$ mas também podíamos ter pedido a seguinte condição equivalente:

$$\mu(G \setminus A) \leq \varepsilon \text{ e } \mu(A \setminus F) \leq \varepsilon.$$

1) $\mu(G \setminus A) \leq \varepsilon$
2) $\mu(A \setminus F) \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \mu(G \setminus A \cup A \setminus F) = \mu(G \setminus F) \leq \mu(G \setminus A) + \mu(A \setminus F) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Por outro lado, se $\mu(G \setminus F) \leq \varepsilon$ então como $G \setminus A \subseteq G \setminus F$ e $A \setminus F \subseteq G \setminus F$ obtemos

$$\mu(G \setminus A) \leq \varepsilon \text{ e } \mu(A \setminus F) \leq \varepsilon.$$

3. Assuma que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$
Se μ é regular então $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$.
Ora se $A \in \mathcal{F}$, para $n \geq 1$, como μ é regular, $\exists$ conjuntos $F_n \subseteq A \subseteq G_n$, com $F_n, G_n \in \mathcal{B}$ tq $\mu(G_n \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$.

Seja $F = \bigcup_{n\geq 1} F_n \in \mathcal{B}$

$G = \bigcap_{n\geq 1} G_n \in \mathcal{B}$

Então $F \subseteq A \subseteq G$ e $\mu(G \setminus F) = 0$ porque

$$\mu(G\setminus F) \underset{\substack{\uparrow \\ G\subseteq G_n}}{\leq} \mu(G_n \setminus F) = \mu(G_n \setminus \underbrace{\bigcup_{n\geq 1} F_n}_{F}) \quad (\supseteq F_n)$$

$$\leq \mu(G_n \setminus F_n) \leq 1/n.$$

Como este resultado vale para todo n temos:
$\mu(G\setminus F) = 0.$

Até aqui temos $F \subseteq A \subseteq G$, $F, G \in \mathcal{B}$ e $\mu(G\setminus F) = 0.$

Logo $A = \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{B}}}{F} \cup \underset{\substack{\cap \\ G\setminus F}}{(A\setminus F)}$ e $\mu(G\setminus F) = 0$

logo $A \in \overline{\mathcal{B}}$

Lembre sempre que a notação $\overline{\mathcal{B}}$ deveria depender de μ, mas para não sobrecarregar notação usamos apenas $\overline{\mathcal{B}}$.

<u>Teorema</u>: Seja μ a medida de Lebesgue ie

$\mu : \mathcal{L} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$\uparrow$ σ-álgebra de Lebesgue

μ é regular i.e. $\forall A \in \mathcal{L}_0$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F, G$, $F \subseteq A \subseteq G$, F fechado, G aberto tal que $\mu(G \setminus F) \leq \varepsilon$.

Obs: note mais uma vez que não pe... mos $\mu(A) < \infty$.

Obs: $\mathcal{L}_0 = \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{M}$ é a chamada σ-álgebra de Lebesgue que coincide com a σ-álgebra dos conjuntos m... com respeito à medida exterior de Lebesgue.

Prova: Seja $A \in \mathcal{L}_0$ e $\varepsilon > 0$ fixo. Queremos encontrar G aberto tq $A \subseteq G$ e $\mu(G \setminus A) \leq \varepsilon$.

Sejam $E_n = [-n, n]$ e seja $A_n = E_n \cap A$.

Ora $A_n \in \mathcal{L}_0$ e $\mu(A_n) \underset{A_n \subseteq E_n}{\leq} \mu(E_n) \leq 2n < \infty$.

Como $\mu(A_n) < \infty$ $\exists$ sequência $\{B_{n,k}\}_{k \geq 1}$ com

$B_{n,k} \in \mathcal{A}$ e $A_n \subseteq \bigcup_{k \geq 1} B_{n,k}$ (i.e. $B_{n,k}$ cobrem A_n)

Então $\mu(A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por def de ínfimo}}}{\leq} \sum_{k \geq 1} \mu(B_{n,k}) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (∇)

Ora $B_{n,k} \in \mathcal{A}$. Mas queremos cobrir A_n por conjuntos abertos. Como $B_{n,k} \in \mathcal{A}$ e como os elementos da álgebra gerada escrevem-se como uniões finitas disjuntas de elementos da semi-álgebra que neste caso são intervalos.

Como $B_{n,k} \in \mathcal{A}$ e $A_n \subseteq E_n$ (por def de A_n) podemos assumir que $B_{n,k} \subseteq [-n,n] = E_n$ ou seja, podemos escrever $B_{n,k} = \sum_{j=1}^{l_{n,k}} I_{n,k,j}$ onde (*)

$I_{n,j,k}$ são intervalos limitados ie da forma

$$I_{n,k,j} = (a_{n,k,j}, b_{n,k,j}]$$

Seja $c_{n,k,j} = b_{n,k,j} + \underbrace{\delta_{n,k,j}}_{>0}$ e seja $J_{n,k,j} = (a_{n,k,j}, c_{n,k,j})$

Então $B_{n,k} \subseteq G_{n,k} = \bigcup_{j=1}^{l_{n,k}} J_{n,k,j}$

Ora $\mu(G_{n,k}) \leq \sum_{j=1}^{l_{n,k}} \underbrace{c_{n,k,j} - a_{n,k,j}}_{\mu(I_{n,k,j}) + \delta_{n,k,j}}$

Agora escolhemos $\delta_{n,k,j}$ tal que $\sum_{j=1}^{l_{n,k}} \delta_{n,k,j} \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+k}}$

Ora, por (*) temos

$$\sum_{j=1}^{l_{n,k}} \mu(I_{n,k,j}) = \mu(B_{n,k})$$

e portanto, acima obtemos $\mu(G_{n,k}) \leq \mu(B_{n,k}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+k}}$

Acabamos de construir conjuntos $G_{n,k} \supseteq B_{n,k}$ abertos tais que

$$\mu(G_{n,k}) \leq \mu(B_{n,k}) + \varepsilon/2^{n+k}$$

Ora, como $A_n \subseteq \bigcup_{k\geq 1} B_{n,k} \subseteq \bigcup_{k\geq 1} G_{n,k} = G_n$

e G_n é união de abertos, logo é aberto.

Por outro lado, $\underbrace{\sum_{k\geq 1} \mu(G_{n,k})}_{\geq \mu(G_n)} \leq \sum_{k\geq 1} \left\{ \mu(B_{n,k}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+k}} \right\}$

$$= \sum_{k\geq 1} \mu(B_{n,k}) + \varepsilon/2^n$$

(aqui estamos a usar ∇)

$$\leq \mu(A_n) + \frac{2\varepsilon}{2^n}$$

Até aqui temos G_n aberto tal que $G_n \supseteq A_n$ e

$$\boxed{\mu(G_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}$$

Seja $G = \bigcup_{n\geq 1} G_n$. G é aberto

Lembre que $A_n = A \cap E_n$ e portanto $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

$A_n \subseteq G_n$ logo $A \subseteq G$.

E $\mu(G \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} G_n \setminus \bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} (G_n \setminus A_n)\right)$

$$\bigcup_{n\geq 1} G_n \setminus \bigcup_{n\geq 1} A_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} (G_n \setminus A_n)$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \mu(G_n \setminus A_n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu(G_n) - \mu(A_n)$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \frac{2\cdot\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$$

Agora falta a outra parte, mas agora é muito simples. Queremos agora encontrar F tal que

$$F \subseteq A \quad \text{e} \quad \mu(A \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Tome A^c e pela 1ª parte da prova, $\exists H$ aberto tal que $A^c \subseteq H$ e $\mu(H \setminus A^c) \leq \varepsilon$.

Então se $F = H^c$ temos F fechado e $H^c = F \subseteq A$ com

$$\mu(A \setminus F) = \mu(A \cap F^c) = \mu(A \cap H) = \mu((A^c)^c \cap H) = \mu(H \setminus A^c) \leq \varepsilon.$$

<u>Observação</u>: Lembre que podemos aproximar o que conjunto Lebesgue mensurável p abertos e fechados.

Seja $\mathcal{F}_\sigma$ = uniões numeráveis de conjuntos fechados
$\mathcal{G}_\delta$ = intersecções numeráveis de conjuntos abertos

Assim podemos fazer o seguinte

$\forall A \in \mathcal{L}$ $\exists R \in \mathcal{F}_\sigma$ tal que $R \subseteq A \subseteq S$ com
$S \in \mathcal{G}_\delta$
$\mu(S \setminus R) = 0$

A forma de o fazer é a seguinte: para cada n $\exists G_n$ e F_n (abertos e fechados, respectivamente) tq $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ e $\mu(G_n \setminus F_n) \leq \underset{\frac{1}{n}}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}}$. Seja $S = \bigcap_{n \geq 1} G_n$ e $R = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. E temos

$$\mu(S \setminus R) \leq \mu(G_n \setminus F_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$$

1) A Medida de Lebesgue - Stieltjes (pag. 95 Taylor)

Em teoria da probabilidade existem medidas em $\mathbb{R}^d$ que são muito usadas.

$\mathbb{P}(\Omega)=1$

$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ v.a.

$X = \begin{cases} 1 & , p \\ 0 & , 1-p \end{cases}$ $\quad \mu(\{1\}) > 0$ $\quad \mu(\{0\})$

$\mu = \text{Leb.}$

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e contínua à direita.

Defina $\boxed{\mu_F\, (a,b] = F(b) - F(a)}$

$X \sim \mathcal{U}[0,1]$

$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mu((-\infty, x])$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad f(t)$

Medida de Lebesgue

1) μ_F é não-negativa (verifique)

2) μ_F é aditiva (verifique - adapte a ~~prova~~ prova para a medida de Lebesgue que corresponde a $F(x)=x$.)

$\int_0^x 1\,dt = x$

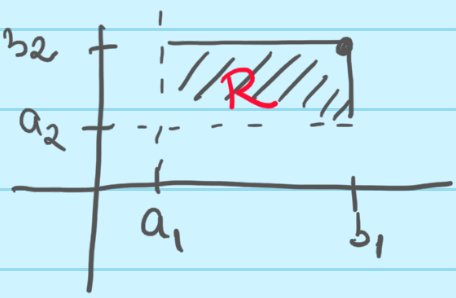
Usando os teoremas de extensão sabemos estender μ a uma função σ-aditiva (verifique)

Quando estamos em dimensão d (por exemplo d = 2) definimos

$$\mu_F(I) = F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_1,a_2)$$

$I = \boxed{(a_1,b_1] \times (a_2,b_2]}$ R

(ver figura)



Aplicando o teorema de extensão podemos estender μ_F à σ-algebra dos Borelanos em $\mathbb{R}^d$, que denotamos

po 9d. Como vimos para a medida de Lebesgue
es extensão define a medida μ_F no complementamento $\mathcal{L}_F^k$ de $\mathcal{B}^k$ co respeito a μ_F.

$\mathcal{L}_F^k$ = classe dos conjuntos Lebesgue-Stieltjes mensuráveis.

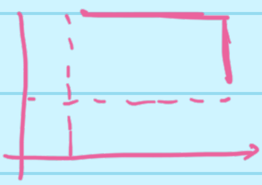
1 $F =$ co-ante

$\mu_F = 0$

2 $F(x_1, x_2) = x_1 . x_2$

$$\mu_F(I) \xrightarrow{\text{como acima}} = b_1 b_2 - b_1 a_2 - a_1 b_2 + a_1 a_2$$

$$= b_1(b_2 - a_2) - a_1(b_2 - a_2)$$



$$= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

μ_F é a medida de Lebesgue.

Estas medidas também são regulares (verifique).

2) Medida de probabilidade $\mathbb{P}$

Dado $\mathcal{F}$ uma σ-algebra em Ω, qualquer medida

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ $\boxed{\text{tal que } \mathbb{P}(\Omega) = 1}$

é chamada uma medida de probabilidade.

Função de distribuição.

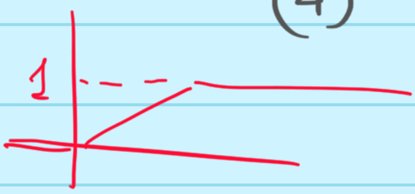
Uma função $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diz-se uma função de distribuição se

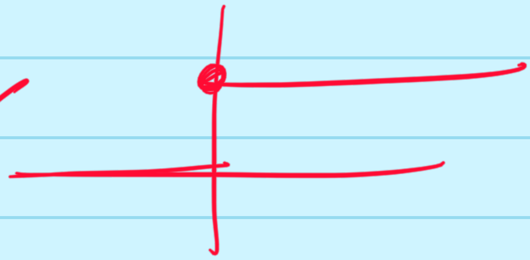
(1) F é monótona crescente

(2) F é contínua à direita

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(4) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$





no caso de estarmos em dimensão d, temos:

(d=2)

$$\boxed{F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$$

(1) F contínua à direita em cada variável

(2) $\mu_F(I) \geq 0 \quad \forall I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$

? (3) $F(x,y) \longrightarrow 0$ se $x \to -\infty$ ou $y \to -\infty$

? (4) $F(x,y) \longrightarrow 1$ se ambos $x, y \to +\infty$.

Dada então uma função de distribuição F pode-mos definir a medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F que pode ser definida em $\mathcal{L}^2$.

$\mu_F(\mathbb{R}^2)=1$ e μ_F é completa.

3) Medidas discretas

Ω espaço ✓

$\mathcal{C}$ classe de todos 'os s b n' ntos

$x_1, \dots x_n, \dots$ sequência ra p - s

distintos de Ω. $p_i \to x_i$

$p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ sequência de n^{os} re 's não ne ga-tivos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ n e ou r e p l too

Seja $\boxed{\mu(E) = \sum_{x_i \in E} p_i}$

Estas medidas dizem-s . s.

Se $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$ então

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{x_n \in E} p_n$$

é uma medida de probabilidade na classe de todos os subconjuntos de Ω.

se $\Omega = \mathbb{R}$ então

$$\boxed{F(x) = \sum_{x_n \leq x} p_n}$$

a medida de probabilidade pode ser escrita como a medida de Lebesgue – Stieltjes de uma função de distribuição.

Agora vamos discutir a integração

Cap. 5 Taylor.

Teoria da integração

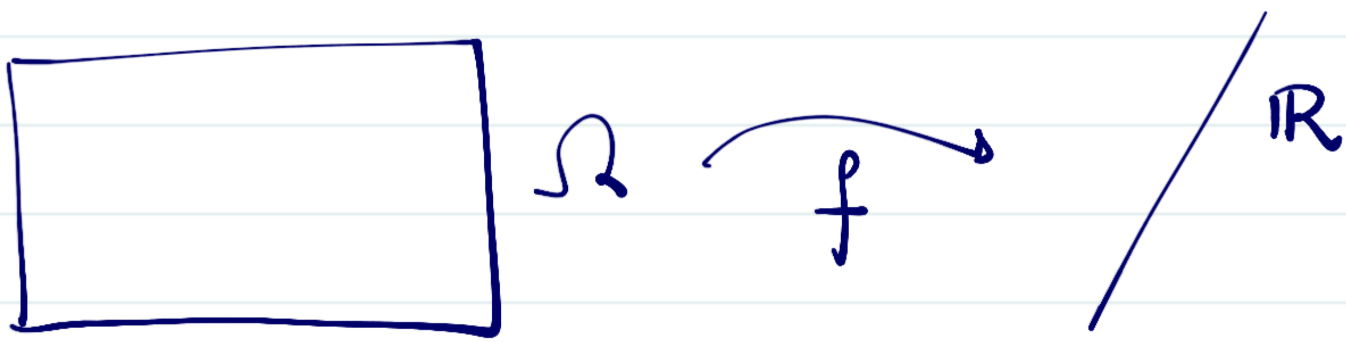
Dada uma função $f: \Omega \to \mathbb{R}^*$ queremos definir o integral de f em Ω, ie $I(f)$. ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)
Gostaríamos que a nossa def. desse uma função com as seg. propriedades:

(1) $I(af+bg) = a\,I(f) + b\,I(g)$, $a,b \in \mathbb{R}$

(2) $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$

(3) $f_n \uparrow f$, $f_n \geq 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ $\forall x \in \Omega$

$$\Downarrow I(f_n) \uparrow I(f)$$



Há duas maneiras de o fazermos:

1) definimos funções elementares, nessas funções definimos $I(f)$ e estendemos a definição (vejam o capítulo 8 do Taylor - a abordagem de Daniel) e depois disso, usando I, poderíamos definir uma medida $\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \, d\mu = I(\mathbb{1}_A)$

se as funções indicadoras fizessem parte desse conjunto de funções e depois usávamos as propriedades do integral para provar que a medida que obtemos é σ-aditiva, ie $\mu\Big(\underbrace{\sum_{j\geq 1} A_j}_{=A}\Big) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j)$

2) Uma vez que nós já fizemos esse caminho, nós vamos definir um operador I à custa da medida μ.

Fixemos então $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Ω espaço, $\mathcal{F}$ σ-álgebra e μ uma medida

Vamos então definir qual o tipo de funções que podem ser integradas.

Funções mensuráveis

Def: Partição de Ω (finita)

Dizemos que $\{E_j\}_{j=1,\dots,n}$ forma uma partição finita de Ω se:

$$E_j \cap E_k = \phi \quad e \quad \bigcup_{j=1}^{n} E_j = \Omega$$
$$j \neq k$$

(Quando $E_j \in \mathcal{F}$ dizemos uma $\mathcal{F}$-partição)

Def Função simples

Dizemos que $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{F}$-simples se

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j}(x)\, c_j$$

com $c_j \in \mathbb{R}$ e $\{E_j\}_{j=1,..n}$ uma $\mathcal{F}$-partição de Ω.

Obs: se $\sum_{j=1}^{n} E_j \neq \Omega$ (imaginemos que a partição não cobre Ω) e se

$f = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j} c_j$, então podemos sempre definir o conjunto $F = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ (e note que $F \in \mathcal{F}$) e depois podemos simplesmente definir $f = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j} c_j + c_{n+1}\mathbb{1}_F$ onde $c_{n+1} = 0$. (*)

Exercício: Mostre que a soma, a diferença e o produto de duas funções simples é uma função simples. (vejam o lema na pag 102 do Taylor)

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto das funções simples. A classe $\mathcal{S}$ é então fechada para vários tipos de operações (obs que f constante também é uma função simples)

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Definição : $\boxed{\text{Função mensurável}}$

Uma função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^*$ diz-se $\mathcal{F}$-mensurável, se $\forall A \in \mathcal{B}^*$

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{B}^*$ = todos os conjuntos que se escrevem como união de um elemento de $\mathcal{B}$ com $\{+\infty\}$ ou $\{-\infty\}$ ou ambos, ie $\{+\infty, -\infty\}$. $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel.

↳ é uma σ-álgebra

Observação : Podemos pensar com a definição acima que vai ser muito difícil na prática, verificar se uma dada função vai, ou não, ser $\mathcal{F}$-mensurável, uma vez que nós não conhecemos todos os elementos da σ-álgebra de Borel e temos de analisar todas as pré-imagens de elementos desta σ-álgebra. Mas de facto não vai ser necessário, o próximo resultado diz-nos que basta analisar uma classe muito menor.

Teorema : Uma função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^*$ é $\mathcal{F}$-mensurável sse $\{x : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$. O mesmo resultado vale colocando $< a$, $> a$ ou $\geq a$.

Exercício: Demonstre o teorema acima (ver Teorema 3.1 do Taylor)

Prova:

($\Rightarrow$) trivial, pela definição de função mensurável e uma vez que qualquer um dos tipos de intervalos
$[-\infty, a]$, $[-\infty, a)$, $(a, +\infty]$ ou $[a, +\infty] \in \mathcal{B}^*$.

($\Leftarrow$) Ora, sabemos que $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$ e queremos ver que $\forall B \in \mathcal{B}^*$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{G} = \{ F \subseteq \mathbb{R}^* : f^{-1}(F) \in \mathcal{F} \}$

① $\mathcal{G}$ é σ-álgebra ② $\mathcal{G} \supseteq [-\infty, a]$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$

$\therefore \mathcal{G} \supseteq \mathcal{B}^*$, já que $\mathcal{B}^*$ é a menor σ-álgebra que contém os conjuntos da forma $[-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Neste caso é fácil de provar que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra, mas também poderíamos ter usado um lema que já vimos na primeira parte do curso que relaciona classes monótonas com σ-álgebras. Vamos então provar que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra:

① $\overline{\mathbb{R}} \in \mathcal{G}$ porque $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = \Omega$ e $\Omega \in \mathcal{F}$.

② $A \in \mathcal{Y} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{Y}$?

Observe que como $A \in \mathcal{Y}$ então $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

Para provar que $A^c \in \mathcal{Y}$ basta observar que

$$f^{-1}(A^c) \overset{\text{verifique!}}{=} \left(f^{-1}(A)\right)^c$$

e como $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é σ-algebra então $\left(f^{-1}(A)\right)^c \in \mathcal{F}$.

③ $A_j \in \mathcal{Y} \Longrightarrow \bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{Y}$

Ora como $A_j \in \mathcal{Y}$, então $\forall j \geq 1$ $f^{-1}(A_j) \in \mathcal{Y}$.

Por outro lado, $\bigcup_{j\geq 1} f^{-1}(A_j) \in \mathcal{F}$ porque $\mathcal{F}$ é uma σ-algebra e $f^{-1}(A_j) \in \mathcal{F}$ $\forall j$

$$\bigcup_{j\geq 1} f^{-1}(A_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right)$$

$$\therefore \bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{F}$$

$\therefore \mathcal{Y}$ é uma σ-algebra, $\mathcal{Y} \supseteq [-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}^*$ $\therefore \mathcal{Y} \supseteq \sigma$-álgebra gerada pelos intervalos $[-\infty, a]$ ie $\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{B}^*$. ✓

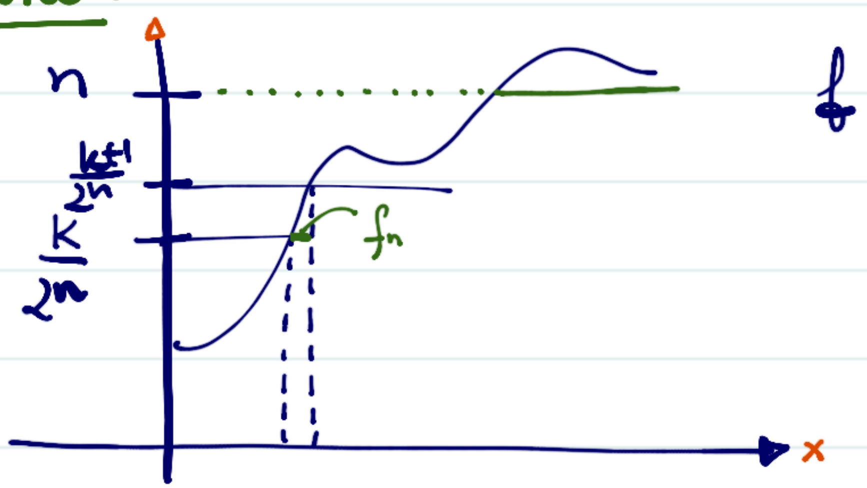
Obs: O resultado acima vai-nos ser muito útil pois para deduzir a mensurabilidade basta ver que a pré-imagem de conjuntos da forma $[-\infty, a] \in \mathcal{F}$.

Exercício: Mostre que qualquer função $\mathcal{F}$-simples é $\mathcal{F}$-mensurável.

Teorema (Teorema de aproximação)

Seja $f \geq 0$, f $\mathcal{F}$-mensurável, $f: \Omega \to \mathbb{R}^*$. Então existe uma sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$, f_n simples e $f_n \uparrow f$ ie $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in \Omega$ tal que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ (convergência pontual)

Prova:



Fixo $n \geq 1$.

Queremos definir f_n.

Vamos fazer o seguinte:

$f_n(x) = n$ nos pontos x onde $f(x) \geq n$ e nos intervalos de tamanho $\frac{1}{2^n}$ i.e. no intervalo $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$ vamos definir $f_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x)$.

Vamos então definir a função f_n:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} = \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n} & \text{se } x \text{ é tal que } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \text{ e } 0 \leq k \leq n2^n - 1. \\ n & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Af: 1) f_n e' uma função simples

Observe que podemos escrever

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{ f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right\}}(x) + n \, \mathbb{1}_{\left\{f^{-1}([n,+\infty])\right\}}(x)$$

Observe que como $f \geq 0$ os conjuntos $\left\{ f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right\}$ e $\left\{f^{-1}([n,+\infty])\right\}$ formam uma $\mathcal{F}$ - partição de $\mathbb{R}^*$. (aqui usamos que f e' $\mathcal{F}$-mensurável)

Af: 2) $f_n \uparrow f$ ie $\{f_n\}_n$ e' uma sequência crescente e converge pontualmente para f.

(1) Monotonia da função f_n:

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega ?$$

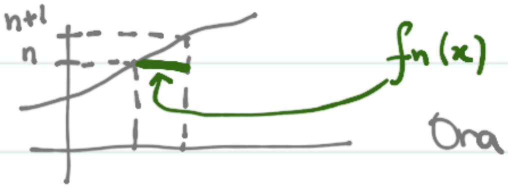
• Se $f(x) = +\infty$ então $f_n(x) = n$ e $f_{n+1}(x) = n+1$ ✓. Assuma que $f(x) < \infty$.

Ora. se $f(x) \geq n+1$ então . $f_n(x) = n$ pois $f(x) \geq n+1 \geq n$ ✓

. $f_{n+1}(x) = n+1$

$\therefore \; f_n(x) = n \leq n+1 = f_{n+1}(x)$ ✓

• se $f(x) \in [n, n+1)$ então $f_n(x) = n$.

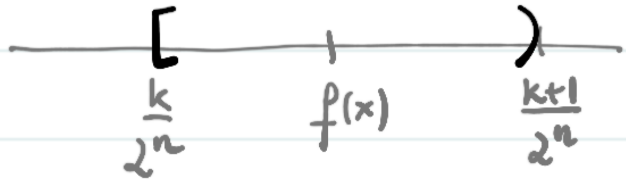


Vamos agora analisar $f_{n+1}(x)$.

Ora $f_{n+1}(x) = \dfrac{\lfloor f(x)2^{n+1} \rfloor}{2^{n+1}} \geq \dfrac{\lfloor n2^{n+1} \rfloor}{2^{n+1}} = n = f_n(x)$ ✓

- se $f(x) < n$.

Então

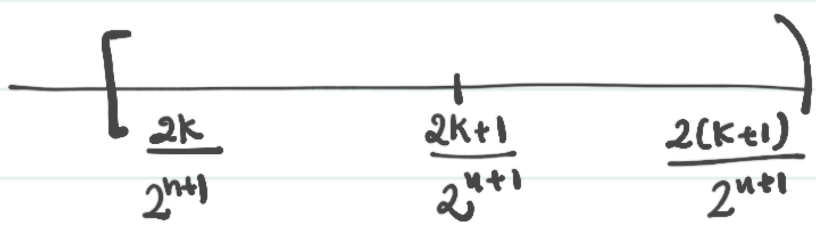


o valor de $f(x)$ está num intervalo desta forma.

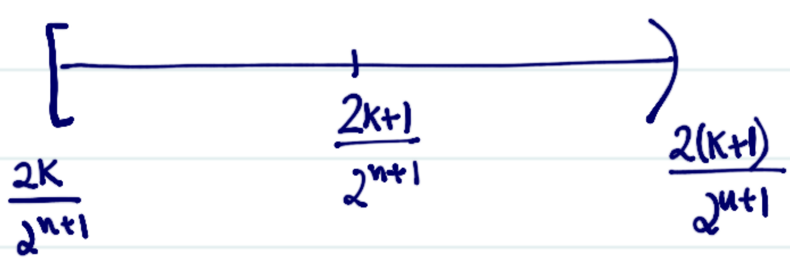
e neste caso, pela definição de $f_n(x)$ temos

$$\boxed{f_n(x) = \frac{k}{2^n}.}$$

Agora no passo $n+1$ vamos ter



Agora temos de considerar dois casos:



1) $f(x) \in \left[\dfrac{2k}{2^{n+1}}, \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$ e neste caso temos $f_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$

e $f_{n+1}(x) = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n}$

observa que

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) = \dfrac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n} = \dfrac{k}{2^n} = \dfrac{2k}{2^{n+1}} \\[2ex] f_{n+1}(x) = \dfrac{\lfloor 2^{n+1} f(x) \rfloor}{2^{n+1}} = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n} \end{array}\right\} f_n(x) = f_{n+1}(x)$$

2) $f(x) \in \left[\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}, \dfrac{2(k+1)}{2^{n+1}} \right)$

Então neste caso temos:

$$\frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}}$$

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad e \quad f_{n+1}(x) = \frac{\lfloor 2^{n+1} f(x) \rfloor}{2^{n+1}} = \frac{2k+1}{2^{n+1}} \geq \frac{k}{2^n} = f_n(x)$$

$\therefore$ em ambos os casos temos $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Agora falta provaremos que vale a convergência pontual ie $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$.

① se $f(x) = +\infty$ então $f_n(x) = n \ \forall n$ e portanto

$$f_n(x) \longrightarrow +\infty = f(x).$$

② se $f(x) < +\infty$ então seja $\tilde{n}$ tq $f(x) < \tilde{n}$ e vamos analisar

$n \geq \tilde{n}$. Lembremos que $f_n(x) = \lfloor 2^n f(x) \rfloor / 2^n$.

Então, como $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

temos que a condição

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \iff k \leq 2^n f(x) < k+1$$

$$\therefore \lfloor 2^n f(x) \rfloor \leq 2^n f(x) < \lfloor 2^n f(x) \rfloor + 1$$

$$\therefore \underbrace{2^n f_n(x)}_{=\lfloor 2^n f(x) \rfloor} \leq 2^n f(x) < 2^n f_n(x) + 1$$

$$\iff f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + \frac{1}{2^n} \quad \forall n.$$

Daqui resulta que $\limsup_n f_n(x) \leq f(x)$

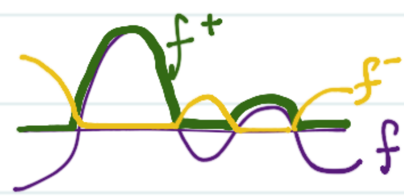
e por outro lado

$$f(x) \leq \liminf_n f_n(x)$$

$$\therefore \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Para uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^*$ vamos definir a parte positiva e a parte negativa de f, que denotamos por f_+, f_-, da seguinte forma:

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$$
$$f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$$



Note que $f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$ e esta decomposição vai ser muito importante quando formos definir o integral.

Note também que $|f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x)$.

$\boxed{*}$ As funções f^{+} e f^{-} são ambas positivas.

Exercício: Mostre que se $f: \Omega \to \mathbb{R}^*$ é $\mathcal{F}$-mensurável então,
($f \in \mathcal{F}$)

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f^{+} = \max\{0, f\} \\ \cdot\ f^{-} = \max\{0, -f\} \\ \cdot\ |f| = f^{+} + f^{-} \\ \cdot\ f = f^{+} - f^{-} \\ \cdot\ a \in \mathbb{R},\ af \end{array}\right\} \in \mathcal{F}$$

. $g, f \in \mathcal{F} \Rightarrow$. $f + g \in \mathcal{F}$ (observe que aqui estamos a assumir que a soma faz sentido i.e. não podemos ter $+\infty - \infty$.

$\Rightarrow$. $fg \in \mathcal{F}$ (aqui fazemos a seguinte convenção de que $0 . \infty = 0$).

(veja o teorema 5.3 do Taylor)

Lema Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções $f_n: \Omega \to \mathbb{R}^*$ tais que $f_n \in \mathcal{F}$.

Então:

1. $\sup_n f_n \in \mathcal{F}$, $\inf_n f_n \in \mathcal{F}$
2. $\limsup_n f_n \in \mathcal{F}$, $\liminf_n f_n \in \mathcal{F}$
3. se a sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge então o limite

é mensurável.

Prova: Por um resultado que já vimos, sabemos que basta analisar, para $c \in \mathbb{R}$, se

$$\{x : \sup_n f_n(x) > c\} \in \mathcal{F} ?$$

Ora $\{x : \sup_n f_n(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x : f_n(x) > c\}}_{\in \mathcal{F} \text{ porque } f_n \in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ porque $\mathcal{F}$ é σ-algebra.

O segundo caso é muito simples já que

$$\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n).$$

Suponha agora que $\{f_n\}_n$ é monótona crescente. Logo

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \sup_n f_n, \text{ logo } \lim_n f_n \in \mathcal{F}$$

Analogamente, se $\{f_n\}_n$ é monótona decrescente, então

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \inf_n f_n.$$

(2)

Então agora note que para provar que $\limsup_n f_n \in \mathcal{F}$, basta observar que se

$$g_n = \sup_{j \geq n} f_j \qquad \left(\text{para o } \liminf_n f_n \text{ tomar } h_n = \inf_{j\geq n} f_j\right)$$

então $\{g_n\}_n$ e $\{h_n\}_n$ são sequências monótonas e

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} g_n \quad \in \mathcal{F}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} h_n \quad \in \mathcal{F}.$$

③ Se $\{f_n\}_n$ converge o seu limite $\lim_n f_n \in \mathcal{F}$ pois

$$\underbrace{\limsup_n f_n}_{\in \mathcal{F}} = \underbrace{\liminf_n f_n}_{\in \mathcal{F}} = \underbrace{\lim_n f_n}_{\in \mathcal{F}}$$

Obs No caso em que A é um conjunto arbitrário de índices, e se $f_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^* \in \mathcal{F}$ para cada $\alpha \in A$ então pode acontecer de $f(x) = \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(x) \notin \mathcal{F}$. Obs Tome $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ e $A \notin \mathcal{L}$. Seja $c \in A$ e ver pag 24 Taylor $f_c(x) = \mathbb{1}_c(x)$. 1) $f_c \in \mathcal{L}$ 2) $\sup_c f_c(x) = \mathbb{1}_A(x)$ $\notin \mathcal{L}$

OBS Quando Ω é um espaço topológico e $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel em Ω → ver pag 43 Taylor, ie $\mathcal{B}$ é a σ-algebra gerada pelos conjuntos abertos, então existe uma nomenclatura específica para as funções mensuráveis com respeito a $\mathcal{B}$
ie se $f: \Omega \to \mathbb{R}^*$ com $f \in \mathcal{B}$ então f diz-se Borel mensurável.

Lema: Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω espaço topológico e f é contínua então f é Borel mensurável.

Exercício: Prove o Lema acima.

Obs se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são duas σ-algebras $\subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$, logo qualquer função $\mathcal{G}$- mensurável é também $\mathcal{F}$-mensurável.

Logo se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}$, então qualquer função contínua num espaço topológico Ω também é $\mathcal{F}$-mensurável.

obs: Lembre que já vimos que em $\Omega = \mathbb{R}^n$ o conjunto $\mathcal{L}^n \supseteq \mathcal{B}^n$.
Logo todas as funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ são Borel mensuráveis e também $\mathcal{L}^n$ mensuráveis.

Lema: Suponha que $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ e
$g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$g \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{F}$

$$\Downarrow$$

$$g \circ f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

é $\mathcal{F}$- mensurável.

Exercício: prove o resultado anterior.

QUASE CERTAMENTE

Definição: Vamos dizer que

$f(x)$ tem uma propriedade P μ-quase certamente e abreviamos para μ - q.c. se $\exists E \in \mathcal{F}$ com $\mu(E) = 0$ tq $f(x)$ tem a propriedade P para todo $x \in \Omega \setminus E$.

Lema: Se $\mathcal{F}$ é μ-completo e $f=g$ q.c. então
$$f\in\mathcal{F} \Longleftrightarrow g\in\mathcal{F}.$$

Obs Sabemos que $\exists E\in\mathcal{F}$ com $\mu(E)=0$ tq. $f(x)=g(x)$ $\forall x\in E^c$.

Prova: Como $f=g$ q.c. $\exists A$ tq $A\in\mathcal{F}$ e $\mu(A)=0$ tq. $f=g$ $\forall x\in A^c$.
Seja $B\in\mathcal{B}^*$. Queremos provar que $g^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Ora

$$g^{-1}(B)=\underbrace{\left(g^{-1}(B)\cap A\right)}_{\subseteq A\in\mathcal{F} \text{ e } \mu(A)=0}\cup\left(g^{-1}(B)\cap A^c\right)$$

$$\left(g^{-1}(B)\cap A^c\right) = \left(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in\mathcal{F}}\cap \underbrace{A^c}_{\in\mathcal{F}}\right)\in\mathcal{F}$$

$\therefore$ $g^{-1}(B)\cap A\in\mathcal{F}$ porque é completo.

$\therefore$ $g^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Por "simetria" obtemos a implicação contrária ✓

Agora vamos definir o integral. Dada uma função f queremos definir $I(f)=\int f\,d\mu$. Lembre-se que a ideia é definir primeiro $I(f)$ em funções "fáceis" e depois vamos estender a definição.

Seja $f\geq 0$ uma função simples ie
$$\boxed{f=\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{E_j}} \qquad c_j\geq 0,\ E_j\in\mathcal{F}$$

Definimos $\quad I(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mu(E_j)$. integral de f com respeito à medida μ

Lembre que se $c_i = 0$ e $\mu(E_i) = +\infty$ a convenção é de que $c_i \mu(E_i) = 0$.

Obs: Assumimos que $f \geq 0$ para evitarmos o problema de termos $+\infty - \infty$ ou o contrário. Assim a soma acima está bem definida.

Obs: Falta ainda ver que a definição acima faz sentido ie a função simples f pode ter várias representações e o valor do integral não pode depender da representação. Para tal assuma que

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{1}_{F_k}$$

e vamos ver que $I(f)$ não depende da representação ie

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j \, \mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} b_k \, \mu(F_k)}$$

Ora $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j \, \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$ ✡

podemos sempre assumir que os $\{F_k\}_{k=1,\dots,m}$ formam uma partição de Ω como fizemos acima em ⊛ na pag 3.

Ora há dois casos a analisar:

① $E_j \cap F_k = \phi$ e neste caso $\mu(E_j \cap F_k) = 0$

② $E_j \cap F_k \neq \phi$ e neste caso teremos de ter $c_j = b_k$.

$$✡ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \, \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_k \, \mu(F_k)$$

porque também podemos assumir que os $\{E_j\}_{j=1,\dots n}$ formam uma partição.

$\therefore$ O integral de uma função simples positiva está bem definido!

—— 1º definição de integral ——

Agora vamos querer estender a nossa definição. Lembre o resultado da aproximação que já vimos lá atrás. Seja então $f \geq 0$ e mensurável. Então definimos

$$I(f) = \lim_{n \to +\infty} I(f_n)$$ onde f_n é uma sequência de funções simples, $f_n \geq 0$ e $f_n \uparrow f$.

obs: sejam f e g funções simples positivas e

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{E_j} \quad e \quad g = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{1}_{F_k}$$

Verifique que

$$\underbrace{\int f+g \, d\mu}_{= I(f+g)} \overset{\text{Exercício}}{=} \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

$$= I(f) + I(g)$$

Também é imediato que se $\alpha, \beta \geq 0$ e f, g simples não negativas, então $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$. (verifique!)

Logo o operador I é linear na classe de funções simples não negativas. Vamos agora verificar que I é monótono no seguinte sentido, se $f \leq g$ então $I(f) \leq I(g)$.

Af: Sejam f, g funções simples, $f \leq g$ e $0 \leq f, g$.
Então $\boxed{I(f) \leq I(g).}$

PROVA: Seja $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{E_j}$ e $g = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{1}_{F_k}$

Por definição

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(E_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$$

$\leq b_k$

porque $\{E_j\}_j$ e $\{F_k\}$ podem ser tomados como partições

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = I(g).$$

Obs Falta agora verificarmos que a definição de $I(f)$ não depende da sequência que escolhemos, ie de f_n.

Suponhamos então que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ e $g_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} f$ conv. pontual

Queremos provar que $\lim_n I(f_n) = \lim_k I(g_k)$.

Este resultado vai ser uma consequência da seguinte afirmação:

Af: $\{f_n\}_{n\geq 1}$ sequência de funções simples $f_n \geq 0$ $f_n \uparrow f$

g função simples não negativa t.q

$$g \leq \lim_n f_n$$

$$\Downarrow$$

$$I(g) \leq \lim_n I(f_n)$$

Assuma a afirmação acima. Ora note que acima $g_k \uparrow f = \lim_n f_n$

$$\therefore g_k \leq f = \lim_n f_n$$

Logo pela última afirmação concluímos que

$$I(g_k) \leq \lim_n I(f_n) \qquad \forall k$$

$$\therefore \lim_k I(g_k) \leq \lim_n I(f_n)$$

Agora por simetria podemos repetir o argumento atrás começando de f_n e iríamos obter $I(f_n) \leq \lim_k I(g_k)$ que vale para todo n, logo $\lim_n I(f_n) \leq \lim_k I(g_k)$

e daqui resulta a igualdade que queremos.

Falta então provar a afirmação acima.

Prova: Lembre que queremos provar o seguinte

$f_n \uparrow$ $\quad f_n$ simples $\quad f_n \geq 0$ $\qquad g \leq \lim f_n$

g simples $\quad g \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$I(g) \leq \lim_n I(f_n).$$

Ora assuma que $g = c\,\mathbb{1}_E$ com $c \geq 0$ e $E \in \mathcal{F}$. Vamos provar o resultado para este tipo de funções e depois vamos ver como concluir para funções simples.

Ora $c = 0$ ou $c \neq 0$.

Se $c = 0$ então há dois casos:

$$\mu(E) < \infty \quad \text{ou} \quad \mu(E) = +\infty$$

Mas em ambos os casos (pela convenção que fazemos de que $0 \cdot \infty = 0$) temos que $I(g) = 0$, e neste caso não há nada a provar pois já sabemos que

$$f_n \geq 0 \implies I(f_n) \geq 0 \quad \text{por monotonia de } I.$$

Suponhamos agora que $c > 0$. Seja ε tq $0 < \varepsilon < c$.

Como f_n é uma função simples então a função $f_n \mathbb{1}_E$ é uma função simples e $f_n \mathbb{1}_E \leq f_n$ e note que

$$\lim_n f_n \mathbb{1}_E \geq g \quad (\text{se } x \in E \text{ então } f_n \mathbb{1}_E = f_n \text{ e}$$

obviamente $\lim_n f_n \mathbb{1}_E = \lim_n f_n \geq g$, se $x \notin E$ então $g = 0$ e $f_n \mathbb{1}_E = 0$, e vale a igualdade)

Ora $f_n = \sum_{k=1}^{M_n} C_{n,k} \mathbb{1}_{F_{n,k}}$ porque f_n é simples.

Então $\mathbb{1}_E f_n = \sum_{k=1}^{M_n} C_{n,k} \mathbb{1}_{F_{n,k} \cap E}$ (Veja fique)

Seja agora $A_n^\varepsilon = \{ x \in E : f_n(x) \geq c - \varepsilon \}$

(1) $A_n^\varepsilon \uparrow$

Seja $x \in A_n^\varepsilon$, então $x \in E$ e $f_n(x) \geq c - \varepsilon$

Mas como $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq c - \varepsilon$ então $x \in A_{n+1}^\varepsilon$.

$\therefore A_n^\varepsilon \subseteq A_{n+1}^\varepsilon$.

(2) $\bigcup_{n \geq 1} A_n^\varepsilon = E$

Quando provamos igualdades entre conjuntos provamos duas inclusões. Ora $\bigcup_{n \geq 1} A_n^\varepsilon \subseteq E$ é óbvia, porque para cada n, $A_n^\varepsilon \subseteq E$, logo a união também está.

Por outro lado, seja $x \in E$. Então como a sequência $f_n \uparrow f$, então $\exists n_0$ tq $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

Logo como $x \in E$ $g(x) = c \leq \lim_n f_n = f$

$$f_n(x) > f - \varepsilon \geq c - \varepsilon$$

e portanto x está em A_n^ε.

$$\text{Ora} \qquad I(f_n) \overset{\text{por monotonia}}{\geq} I(f_n \mathbb{1}_E) \geq I(f_n \mathbb{1}_{A_n^\varepsilon})$$

$$E = \bigcup_n A_n^\varepsilon \supseteq A_n^\varepsilon$$

Mas no conjunto A_n^ε temos que $f_n \geq c - \varepsilon$, logo temos que $f_n \mathbb{1}_A^\varepsilon \geq \underbrace{\mathbb{1}_{A_n^\varepsilon}(c-\varepsilon)}$

↳ volta a ser uma função simples e positiva porque $\varepsilon < c$.

Daqui resulta que $I(f_n) \geq I(f_n \mathbb{1}_{A_\varepsilon^n}) \geq I((c-\varepsilon)\mathbb{1}_{A_n^\varepsilon})$
$= (c-\varepsilon)\mu(A_n^\varepsilon)$

Daqui resulta que $(c-\varepsilon)\underbrace{\lim_n \mu(A_n^\varepsilon)} \leq \lim_n I(f_n)$

Observa que este limite existe porque A_n^ε é uma sequência crescente

Mas de facto $\lim_n \mu(A_n^\varepsilon) = \mu(E)$ porque $\bigcup_{n \geq 1} A_n^\varepsilon = E$
e estamos a usar a continuidade por baixo de μ.

Agora temos duas possibilidades:

1) $\mu(E) = +\infty$

neste caso como $\underbrace{(c-\varepsilon)}_{>0} \underset{+\infty}{\underset{\parallel}{\mu(E)}} \leq \lim\limits_n I(f_n)$

não há nada a provar porque a desigualdade $g \leq \underset{+\infty}{\underset{\parallel}{\lim}} I(f_n)$ vale sempre.

2) $\mu(E) < +\infty$.

Então vamos ter $c\,\mu(E) - \varepsilon\mu(E) \leq \lim I(f_n)$

$$c\,\mu(E) = I(g)$$

porque $g = c\,\mathbb{1}_E$

$$\therefore \quad I(g) - \varepsilon\mu(E) \leq \lim_n I(f_n)$$

Como $\mu(E) < \infty$ agora basta tomarmos $\varepsilon \to 0$ e obtemos

$$I(g) \leq \lim_n I(f_n)$$

Assim provamos o resultado como queríamos para $g = c\,\mathbb{1}_E$.

Falta completar a prova no caso geral.

Ora g é função simples não negativa, logo

$$g = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{E_k}$$

$\therefore \quad I(g) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \mu(E_k)$ $\boxed{*}$ Tomemos agora $f_n \mathbb{1}_{E_k}$.

Observe que

$$\lim_n f_n \mathbb{1}_{E_k} \geq c_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Isto é verdade pelo seguinte argumento.

1. Se $x \notin E_k$ então a desigualdade acima vale trivialmente
2. Se $x \in E_k$ temos $\lim_n f_n \mathbb{1}_{E_k} = \lim_n f_n$

$$\text{e} \quad c_k \mathbb{1}_{E_k} = c_k = g$$

e já sabemos que $g \leq \lim_n f_n$ ✓

Pela primeira parte da prova temos: $f_n \mathbb{1}_{E_k}$ uma sequência de funções simples $f_n \mathbb{1}_{E_k}$ monótona tal que

$$\lim_n f_n \mathbb{1}_{E_k} \geq c_k \mathbb{1}_{E_k}$$

logo

$$\lim_n I(f_n \mathbb{1}_{E_k}) \geq I(c_k \mathbb{1}_{E_k}) = c_k \mu(E_k)$$

Volte a $\boxed{*}$.

Temos

$$I(g) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{m} I(c_k \mathbb{1}_{E_k})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \lim_n I(f_n \mathbb{1}_{E_k}) = \lim_n \sum_{k=1}^{m} I(f_n \mathbb{1}_{E_k})$$

$$\underset{\text{linearidade}}{=} \lim_n I\left(\sum_{k=1}^{m} f_n \mathbb{1}_{E_k}\right)$$

$$\underset{\{E_k\}_k \text{ forma uma partição}}{=} \lim_n I(f_n) \quad ✓$$

Acabamos então de verificar que se $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $f \geq 0$ mensurável, então $I(f) = \lim_n I(f_n)$ onde $f_n \uparrow f$ simples positivas

Agora vamos estender para qualquer função mensurável.
Lembremos que

$$f^+, f^- : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^*, \; f^+, f^- \geq 0 \text{ são mensuráveis}$$

Definição: Dizemos que uma função $f: \Omega \to \mathbb{R}^*$ mensurável é integrável se $I(f^+) < \infty$ e $I(f^-) < \infty$ e neste caso definimos $\boxed{I(f) = I(f^+) - I(f^-).}$

obs Note que acima não indexamos o operador I na medida μ porque sempre assumimos que temos um espaço de medida que está fixado ie

$$(\underbrace{\Omega}_{\text{espaço abstrato}}, \overbrace{\mathcal{F}}^{\sigma\text{-algebra}}, \underbrace{\mu}_{\text{medida}})$$

$\mu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ função σ-aditiva e $\mu(\emptyset) = 0$.

Quando $\mu(\Omega) = 1$ dizemos que μ é uma medida de probabilidade
Então quando temos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\mathbb{P}$ = medida de probabilidade, dizemos que Ω é o espaço amostral

e os elementos de $\mathcal{F}$ são eventos.

Uma variável aleatória é simplesmente uma função mensurável ie

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$$

ie

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \text{então} \quad X^{-1}(B) = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in B \} \in \mathcal{F}$$

A medida μ definida em $\mathcal{B}$ definida por:

$$\mu : \mathcal{B} \to [0,1]$$

$$\mu(\underset{\overset{\cap}{\mathcal{B}}}{A}) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$$

é uma medida de probabilidade. (verifique)

A medida μ chama-se a medida de distribuição da v.a. X.

Também já vimos que se f é Borel mensurável, então $f \circ X = f(X)$ é $\mathcal{F}$-mensurável ie dada X uma v.a. e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$-mensurável então $f(X)$ é uma v.a.

Se definirmos $\boxed{F(x) = \mu((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x])}$

então F é uma f. de distribuição ie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua à direita, monótona crescente ie $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ e $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. (verifique!)

Propriedades do integral:

Sejam $A, B \in \mathcal{F}$ com $A \cap B = \phi$ e $c \in \mathbb{R}$,

e sejam $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis e integráveis.

1) Vamos usar a seguinte notação

$I(f) = \int f \, d\mu$ e se $E \in \mathcal{F}$ $\int_E f \, d\mu := \int f \mathbb{1}_E \, d\mu$

e agora afirmamos o seguinte:

(a) f é integrável em A

(b) $f+g$ é integrável

(c) $|f|$ é integrável

(d) cf é integrável

(a) $f \mathbb{1}_A$ é integrável, ie $I((f\mathbb{1}_A)^+)$ e $I((f\mathbb{1}_A)^-) < \infty$.

Ora $(f\mathbb{1}_A)^+ = f^+ \mathbb{1}_A$ e $(f\mathbb{1}_A)^- = f^- \mathbb{1}_A$

Então precisamos de provar que:

$$I(f^+ \mathbb{1}_A) < \infty.$$

obs: O integral é monótono ie se $f, g \geq 0$ mensuraveis com

$f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$. (já provamos p/ funções simples positivas)

Provemos agora a observação. Ora $I(f) = \lim_n I(f_n)$ com $f_n \in S_+$ (S_+ = espaço das funções simples positivas) e $f_n \uparrow f$.

$I(g) = \lim_k I(g_k)$ com $g_k \in S_+$ e $g_k \uparrow g$.

1) $\tilde{g}, \tilde{f} \in S_+ \implies \min\{\tilde{g}, \tilde{f}\} \in S_+$ $\quad \overset{\shortparallel}{\tilde{g} \wedge \tilde{f}}$

Então como $f_n, g_n \in S+$ temos $f_n \wedge g_n \in S+$

$$f_n \wedge g_n \uparrow f \wedge g \overset{\nearrow}{=} f \text{ por hipótese}$$

e portanto $I(f) \overset{\text{definição}}{=} \lim_n I(f_n \wedge g_n) \leq \lim_n I(g_n) \overset{\text{def}}{=} I(g)$

já provamos antes para funções simples.

Com esta observação a prova é trivial já que

$$I(f^+ \mathbb{1}_A) \underset{\substack{\uparrow \\ f^+ \mathbb{1}_A \leq f^+}}{\leq} I(f^+) < \infty \text{ porque } f \text{ é integrável}$$

e analogamente $I(f^- \mathbb{1}_A) \leq I(f^-) < \infty$.

ⓑ $f+g$ é integrável

Ora $I(\underbrace{(f+g)^+}_{\text{função positiva}}) \leq I(|f| + |g|) = I(f^+ + f^- + g^+ + g^-)$

(*)

Agora vamos ter de usar a linearidade do integral para funções positivas. Nós já vimos que a linearidade é válida para funções simples positivas, vamos agora ver que para funções mensuráveis a linearidade também é verdade.

obs Sejam $f, g \geq 0$ mensuráveis.

S = espaço de funções simples

$$\boxed{I(f+g) = I(f) + I(g)}$$

Como $f, g \geq 0$ então $\exists f_n \in S \ (f_n \uparrow f)$ e $g_n \in S$ $g_n \uparrow g$, $f_n, g_n \geq 0$.

Então $f_n + g_n \in S$; $f_n + g_n \geq 0$ e $f_n + g_n \uparrow f + g$.

Daqui resulta que
$$
\begin{aligned}
I(f+g) &= \lim_n I(f_n + g_n) \\
&= \lim_n I(f_n) + I(g_n) \quad \text{linearidade de } I \text{ em } S. \\
&= \lim_n I(f_n) + \lim_n I(g_n) \\
&= I(f) + I(g).
\end{aligned}
$$

(*) Podemos repetir o argumento anterior e provar para $\alpha \geq 0$ que $I(\alpha f + g) = \alpha I(f) + I(g)$.

De volta a (*) acima temos
$$
\begin{aligned}
I((f+g)^+) &\leq I(f^+ + f^- + g^+ + g^-) \\
&= I(f^+) + I(f^-) + I(g^+) + I(g^-) \\
&< \infty \text{ porque } f, g \text{ são integráveis.}
\end{aligned}
$$

(c) e (d) provam-se analogamente. (exercício)

(2) $$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$$

Ora $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int \mathbb{1}_{A \cup B} f \, d\mu$

$$= I\left((f \mathbb{1}_{A \cup B})^+ \right) - I\left((f \mathbb{1}_{A \cup B})^- \right)$$

$(f \mathbb{1}_{A \cup B})^+ = f^+ \mathbb{1}_{A \cup B}$

$\boxed{\text{Exerc. } \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad \text{Lembre que } A \cap B = \emptyset}$

linearidade para funções integ. e positivas.

$$= I(f^+ \mathbb{1}_A + f^+ \mathbb{1}_B)$$
$$= I(f^+ \mathbb{1}_A) + I(f^+ \mathbb{1}_B)$$

Analogamente se prova que $I(f^- \mathbb{1}_{A\cup B}) = I(f^- \mathbb{1}_A) + I(f^- \mathbb{1}_B)$

Juntando tudo, temos que

$$I(f \mathbb{1}_{A\cup B}) = I(f^+ \mathbb{1}_A) - I(f^- \mathbb{1}_A) + I(f^+ \mathbb{1}_B) - I(f^- \mathbb{1}_B)$$
$$= I((f^+ - f^-) \mathbb{1}_A) + I((f^+ - f^-) \mathbb{1}_B)$$
$$= I(f \mathbb{1}_A) + I(f \mathbb{1}_B)$$
$$= \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$$

✓

3 f integrável $\Rightarrow |f| < \infty$ q.c.

Como f é integrável, sabemos que $I(f^+) < \infty$. Seja

$$A = \{x : f^+(x) = +\infty\}$$

Observe que $A \in \mathcal{F}$ porque $A = (f^+)^{-1}(\underbrace{\{+\infty\}}_{\in\,\mathcal{B}^*}) \in \mathcal{F}$ uma vez que f^+ é mensurável.

Seja $f_n \in \mathcal{S}$ com $f_n \geq 0$ e $f_n \uparrow f^+$.

Então $f_n = \sum_{j=1}^{l_n} c_j^n \mathbb{1}_{E_{nj}} = \sum_{j=1}^{l_n} c_j^n \left[\mathbb{1}_{E_{nj}\cap A} + \mathbb{1}_{E_{nj}\cap A^c}\right]$

$C_j^n \geq 0$

$$= \sum_{j=1}^{l_n} c_j^n \mathbb{1}_{E_{nj}\cap A} + \sum_{j=1}^{l_n} c_j^n \mathbb{1}_{E_{nj}\cap A^c}.$$

Vamos agora definir $g_n = \sum_{j=1}^{l_n} c_j^n \mathbb{1}_{E_{nj}\cap A^c} + \sum_{j=1}^{l_n} (c_j^n \vee n) \mathbb{1}_{E_{nj}\cap A}$

Podemos assumir que os E_{nj}'s formam uma partição de Ω (já sabemos como fazer isso, era só tomar um conjunto extra e nesse conjunto tomar a constante igual a zero).

Então temos:

1) $g_n \in \mathcal{S}$

2) $g_n \geq 0$ (porque $C_j^n \geq 0$)

3) $g_n \uparrow f^+$ (porque em A, $f^+ = \infty$)

note que g_{n+1} ou vale C_j^{n+1} (que é maior ou igual a C_j^n porque $f_n \uparrow$) ou vale $n+1$. Logo $g_n \uparrow$.

Além disso $g_n \neq f_n$ em A e nesse caso $g_n \geq f_n$.

4) $g_n \geq f_n$

Obs que a diferença entre g_n e f_n é no conjunto A onde $f^+ = +\infty$.

Então

$$I(g_n) \geq \sum_{j=1}^{l_n} (C_j^n \vee n)\,\mu(E_{nj} \cap A) \geq n \sum_{j=1}^{l_n} \mu(E_{nj} \cap A)$$

$= n\,\mu(A)$ porque os E_{nj}'s formam uma partição.

Logo

$$\mu(A) \leq \frac{1}{n} I(g_n) \leq \frac{1}{n} \underbrace{I(f^+)}_{<\infty} \quad \forall n$$

$$\therefore \mu(A) = \mu(f^+ = +\infty) = 0$$

④ $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

Ora $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = I((f+g)^+) - I((f+g)^-)$

Mas $(f+g)^+ \neq f^+ + g^+$!

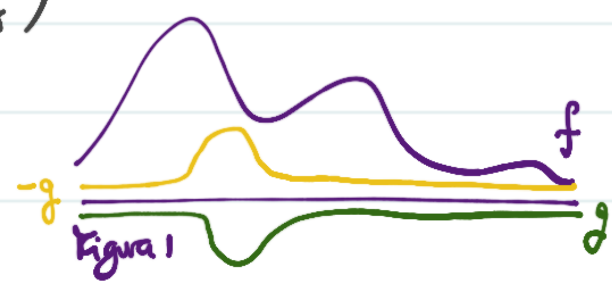
Então fazemos o seguinte

$$(f+g)^+ = \mathbb{1}_{\{+,+\}}(f^+ + g^+) + \mathbb{1}_{\{+,-\}}(f^+ - g^-)$$

$\{+,+\}$: $f \geq 0$, $g \geq 0$; $\{+,-\}$: $f \geq 0$, $g \leq 0$, $f \geq |g|$ — ver figura ①

$$+ \mathbb{1}_{\{-,+\}}(g^+ - f^-)$$

$\{-,+\}$: $g \geq |f|$



observa que quando $f, g \leq 0$ então $(f+g) \leq 0$ e $(f+g)^+ = 0$.

Então temos: $I((f+g)^+) = I(\mathbb{1}_{\{+,+\}}(f^+ + g^+))$
$+ I(\mathbb{1}_{\{+,-\}}(f^+ - g^-))$
$+ I(\mathbb{1}_{\{-,+\}}(g^+ - f^-))$

① $I(\mathbb{1}_{\{+,+\}}(f^+ + g^+)) = I(\mathbb{1}_{\{+,+\}} f^+) + I(\mathbb{1}_{\{+,+\}} g^+)$ ✓

Obs: $f \geq g \geq 0$, $I(g) < \infty \implies I(f-g) = I(f) - I(g)$

Ora $f = f - g + g$. Logo $I(f) \overset{\text{linearidade de } I}{=} I(\underbrace{f-g}_{\geq 0}) + I(\overbrace{g}^{\geq 0})$. Como $I(g) < \infty$

subtraímos de ambos os membros da igualdade e obtemos

$$\boxed{I(f) - I(g) = I(f-g).}$$

② $I(\mathbb{1}_{\{+,-\}}(f^+ - g^-)) = ?$

Ora $\mathbb{1}_{\{+,-\}}(f^+ - g^-) = \mathbb{1}_{\{+,-\}} f^+ - \underbrace{\mathbb{1}_{\{+,-\}} g^-}$

esta função é positiva
como g é integravel $I(|g|) < \infty$ e $I(g^-) < \infty$. logo $\mathbb{1}_{\{+,-\}} g^-$ é integ.

Pela observação anterior temos

$$I(\mathbb{1}_{\{+,-\}}(f^+ - g^-)) = I(\mathbb{1}_{\{+,-\}} f^+) - I(\mathbb{1}_{\{+,-\}} g^-)$$

O mesmo vale para o restante integral.

Pondo tudo junto temos:

$$\underbrace{I(\mathbb{1}_{\{+,+\}} f^+)}_{A} + \underbrace{I(\mathbb{1}_{\{+,-\}} f^+)}_{B} - I(\mathbb{1}_{\{-,+\}} f^-)$$
$$+ I(\mathbb{1}_{\{+,+\}} g^+) - I(\mathbb{1}_{\{+,-\}} g^-) + I(\mathbb{1}_{\{-,+\}} g^+).$$

Agora vamos repetir o argumento com $(f+g)^-$.

Observa que f^+ aparece em $(f+g)^-$ apenas quando vamos ter $g^- - f^+$ e isso acontece quando $\mathbb{1}_{\{+,-\}}(g^- - f^+)$.

$f \leq |g|$ C

Quando pusermos tudo junto em f^+ vamos ter $A+B-C$

ie

$$I\Big(f^+\big(\mathbb{1}_{\{+,+\}}+\underbrace{\underbrace{\mathbb{1}_{\substack{\{+,-\}\\ f\geq |g|}}+\mathbb{1}_{\substack{\{+,-\}\\ f\leq |g|}}}_{\mathbb{1}_{\{+,-\}}=\mathbb{1}_{\substack{f\geq 0\\ g\leq 0}}}\big)}_{\mathbb{1}_{\{f\geq 0\}}}\Big)$$

$$= I\left(f^+\,\mathbb{1}_{\{f\geq 0\}}\right) = I(f^+)$$

Repetindo as contas para os restantes termos, vamos ter no fim:

$$I(f^+) - I(f^-) + I(g^+) - I(g^-)$$
$$= I(f) + I(g) \quad \checkmark$$

⑤ $$\int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu\,, \quad c\in\mathbb{R}$$

1. se $c=0$ não há nada a provar.
2. $c>0$.

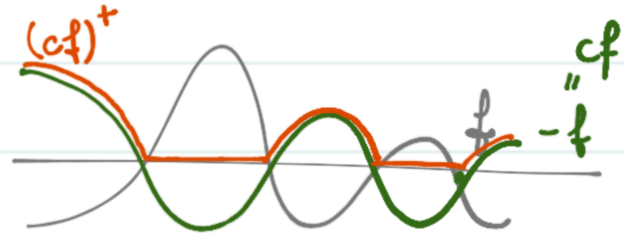
Ora $$\int cf\,d\mu = I((cf)^+) - I((cf)^-)$$
$$= I(cf^+) - I(cf^-)$$
linearidade de I para funções positivas
$$= c\,I(f^+) - c\,I(f^-) = c\,I(f) \quad \checkmark$$

3. $c < 0$

$$\int c\, f\, d\mu = I\big((cf)^+\big) - I\big((cf)^-\big) \quad \boxed{*}$$

$$(cf)^+ = -cf^-$$

ver figura



cf, ($c=-1$ p.e.)

$$(cf)^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } f \geq 0 \;\Rightarrow\; cf \leq 0 \;\Rightarrow\; (cf)^+ = 0. \\ -cf^- & \text{se } f \leq 0 \;\Rightarrow\; cf \geq 0 \;\Rightarrow\; (cf)^+ = f^-(-c) \end{cases}$$

$$(cf)^- = \begin{cases} 0 & \text{se } f \geq 0 \;\Rightarrow\; cf \leq 0 \;\Rightarrow\; (cf)^- = 0 \\ -cf^+ & \text{se } f \leq 0 \;\Rightarrow\; cf \geq 0 \;\Rightarrow\; (cf)^- = -cf^+ \end{cases}$$

$\boxed{*}$ Então temos $\displaystyle\int cf\, d\mu = I(-cf^-) - I(-cf^+)$

$$= -c\, I(f^-) + c\, I(f^+) = c\, I(f)$$

⑥ $f \geq 0$ q.c. $\Rightarrow$ $I(f) \geq 0$.

Af: se $g = 0$ q.c. $\Rightarrow$ $I(g) = 0$.
$g \geq 0$

Usando a afirmação fazemos o seguinte. Como $f \geq 0$ q.c. então $f^- = 0$ q.c. logo $I(f^-) = 0$ e portanto $I(f) = I(f^+) \geq 0$, porque $f^+ \geq 0$.

Agora vamos provar a afirmação.

Seja $g_n \geq 0$, simples tal que $g_n \uparrow g$. Queremos provar que $I(g) = \lim_n I(g_n) = 0$.

↑ já sabemos.

Como g_n é simples, $g_n = \sum_{j=1}^{l_n} C_j^n \mathbb{1}_{E_{n,j}}$

- se $\mu(E_{n,j}) > 0$, então se $C_j^n > 0$ como

$g_n = C_j^n \leq g$ e $g = 0$ q.c. chegamos a um absurdo

- Então $\mu(E_{n,j}) = 0$. Logo $I(g_n) = \sum_{j=1}^{l_n} C_j^n \mu(E_{n,j}) = 0$

$\therefore I(g_n) = 0 \ \forall n \Rightarrow I(g) = 0.$ ✓

Obs: Se $\underset{q.c.}{f \geq g}$ f, g int então $I(f) \geq I(g)$

Isto é verdade porque se $f \geq g$ q.c. $\Leftrightarrow$ $f - g \geq 0$ q.c.

$\underset{(6)}{\Rightarrow}$ $I(f-g) \geq 0$ $\Rightarrow$ $I(f) - I(g) \geq 0$

$\Rightarrow$ $I(f) \geq I(g)$ ✓

⑦ $\left.\begin{array}{l} f \geq 0 \quad q.c. \\ \int f \, d\mu = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f = 0 \ q.c.$

Seja $A_n = \{ x : f(x) > \frac{1}{n} \}$. $A_n \in \mathcal{F}$ pois

$$A_n = \underbrace{f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{n}, +\infty\right]\right)}_{\mathcal{B}^*} \in \mathcal{F} \quad \text{porque } f \in \mathcal{F}.$$

Também temos que $f > \frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n}$ q.c.

1. Se $x \in A_n$ então $\frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n} = \frac{1}{n} < f(x)$ por definição de A_n

2. Se $x \notin A_n$ então $\frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n} = 0$ e $f(x) \geq 0$, q.c.

Logo pela observação anterior temos

$$0 = I(f) \geq I\left(\frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n}\right) = \frac{1}{n} \mu(A_n) \quad \forall n$$

$$\therefore \mu(A_n) = 0 \ \forall n.$$

$$\therefore \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = 0$$

Finalmente $\{x : f(x) > 0\} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$ e $\mu\{f > 0\} = 0$

$$\therefore f = 0 \ q.c.$$

8) $f = g$ q.c. $\Longrightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

Ora

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

Seja $A = \{ f \neq g \}$. Observa que $A = \{ x : (f-g)x \neq 0 \}$

Como $f, g \in \mathcal{F} \to f-g \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$.
Por hipótese $\mu(A) = 0$.

Então $$\int f^+ \, d\mu = \int \left(f^+ \mathbb{1}_A + f^+ \mathbb{1}_{A^c} \right) d\mu$$

$$\underset{\text{linearidade}}{=} \int f^+ \mathbb{1}_A \, d\mu + \int f^+ \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu$$

$\int f^+ \mathbb{1}_A \, d\mu = 0$ porque $\mu(A) = 0$

no conjunto A^c
$f = g$ logo $f^+ = g^+$

$\int f^+ \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu = \int g^+ \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu$

Então $$\int f^+ \, d\mu = \int g^+ \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu = \int g^+ \, d\mu$$

Agora basta repetir o argumento para f^- e vamos obter

$$\int f^- \, d\mu = \int f^- \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu = \int g^- \, d\mu$$

Daqui resulta que $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

⑨ Seja $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $h \in \mathcal{F}$, f integrável, $|h| \leq f$

$\Downarrow$

h é integrável

Observa que

$$\int h^+ \, d\mu \leq \int |h| \, d\mu \leq \int f \, d\mu < \infty$$

f int.

$h^+ \leq |h|$
mon. do int.

Analogamente para h^- i.e

$$\int h^- \, d\mu \leq \int |h| \, d\mu \leq \int f \, d\mu < \infty$$

Como $I(h^+) < \infty$ e $I(h^-) < \infty$ então $I(h) < \infty$.

⑩ $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$

$f = f^+ - f^-$

Observe que $\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ - f^- \, d\mu \right|$

linearidade do int. $= \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right|$

desigualdade triangular $\leq \left| \int f^+ \, d\mu \right| + \left| \int f^- \, d\mu \right|$

$f^+, f^- \geq 0$
$\therefore I(f^+), I(f^-) \geq 0$

$= \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int f^+ + f^- \, d\mu$

lin.

$= \int |f| \, d\mu$ ✓

(11) $|h| \leq k$

$h = 0$ em E $\Big\} \Rightarrow h$ integrável

$\mu(E^c) < \infty$

Ora $\displaystyle\int |h| \, d\mu = \underbrace{\int_E |h| \, d\mu}_{\substack{\| \\ 0 \text{ porque} \\ h = 0 \text{ em } E \\ \therefore |h| = 0 \text{ em } E}} + \int_{E^c} \overbrace{|h|}^{\leq k} d\mu \leq k \mu(E^c) < \infty$

(12) f integravel, $f \in \mathcal{F}$ se $f = g$ q.c. $\Longrightarrow$ g integravel

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ completo

obs já vimos anteriormente que neste caso $g \in \mathcal{F}$

(este ponto já foi visto acima pois $J(f) = J(g)$. Como $J(f) < \infty$ então $J(g) < \infty$).

(13) f, g integráveis

Se $\displaystyle\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{F}$

$$\Downarrow$$

$f = g$ q.e. $\boxed{*}$

Seja $A_n = \left\{ f \geq g + \frac{1}{n} \right\}$. Ora $A_n \in \mathcal{F}$. Suponhamos por Redução ao absurdo que não vale $\boxed{*}$. Então $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} > 0$.

Ora um dos conjuntos

$$\{x : f(x) > g(x)\} \text{ ou } \{x : f(x) < g(x)\}$$

tem de ter medida μ estritamente positiva. $(*)$

Lembre que $A_n = \{x : f(x) \geq g(x) + 1/n\}$.

Então se $x \in A_n$, $f(x) \geq g(x) + 1/n \geq g(x) + \frac{1}{n+1}$ $\therefore x \in A_{n+1}$

$\therefore A_n \subseteq A_{n+1}$

Como μ é uma medida e $\bigcup_{n\geq 1} A_n \uparrow A$ então

$\underbrace{\mu(A)}_{>0} = \lim_n \mu(A_n)$, porque μ é contínua por baixo.

$\therefore \exists\, n_0$ tq $\mu(A_{n_0}) > 0$ (porque se todos fossem nulos não teríamos ⊛)

Mas então $\int_{A_{n_0}} f\, d\mu = \int_{A_{n_0}} g\, d\mu$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_{A_{n_0}} \underbrace{(f-g)}_{\geq \frac{1}{n_0}}\, d\mu \geq \frac{1}{n_0}\mu(A_{n_0}) > 0$$

O que é absurdo!

Aqui terminamos com as propriedades dos integrais, que envolvem um nº finito de funções.

Agora vamos analisar os teoremas clássicos de convergência de integrais.

Vamos começar pelo teorema de convergência monótona. Fixemos o nosso espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Teorema (CONVERGÊNCIA MONÓTONA) (TCM)

Sejam $f_n \geq 0$, $f_n \in \mathcal{F}$, $f_n \uparrow f$. Então $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$, ie

$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = I(f).$$

(*) Se f não for integrável, ou f_n é integrável para todo n e $\lim_n \int f_n d\mu = +\infty$ ou $\exists N$ tal que f_N não é integrável e daí não se tem *.

<u>Prova</u>: Ora $f_n \geq 0$ e $f_n \in \mathcal{F}$. Logo $\exists \{g_{n,k}\}_k$ seq de funções simples t.q. $g_{n,k} \uparrow_k f_n$, e então

$$I(f_n) = \lim_k I(g_{n,k}) \quad \forall n$$

Agora a ideia vai ser usar a sequência de funções simples $\{g_{n,k}\}_k$ e encontrar uma subsequência que vai convergir a f.

Observe que temos

$$\begin{array}{cccccc}
g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & \cdots \longrightarrow & f_1 \\
g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \cdots \longrightarrow & f_2 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & \cdots & f_3 \\
\vdots & & & & & f_4 \\
 & & & & & \vdots
\end{array} \quad \uparrow f$$

Vamos escolher a seguinte sequência $g_1 = g_{11}$

Agora no 2º passo queremos escolher g_2 de tal modo que g_2 seja maior do que g_{11}, então escolhemos

$$g_2 = \max\{g_{12}, g_{22}\}$$

Desta forma sabemos que $g_2 \geq g_{12} \geq g_{11} = g_1$.

$$\therefore g_2 \geq g_1 \text{ como gostaríamos.}$$

No 3º passo tomamos $g_3 = \max\{g_{13}, g_{23}, g_{33}\}$ e por aí vamos ie $g_k = \max\limits_{1 \le n \le k} \{ g_{n,k} \}$ (isto corresponde a fixar a k-ésima coluna e de lá tirar o valor máximo)

$$\begin{array}{ccccl}
g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \cdots & f_1 \\
g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \cdots \longrightarrow & f_2 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \cdots & f_3 \\
\vdots & & & & f_4 \\
 & & & & \vdots
\end{array} \qquad \uparrow f$$

passo 1

passo 2

passo 3

observe que: (1) g_k são funções simples (g_k é o máximo de um número finito de funções simples, logo é uma f. simples)

(2) $g_k \uparrow f$

ora $\quad g_{k+1} = \max\limits_{1 \le n \le k+1} g_{n,k+1}$

$$= \max \left\{ \max_{1 \le n \le k} g_{n,k+1} \,,\; g_{k+1,k+1} \right\} \quad (*)$$

observe que este máximo é ao longo da coluna k+1, mas é óbvio que

$$\max_{1 \le n \le k} g_{n,k+1} \ge g_{n,k}$$

$k+1 = 3$

$$\begin{array}{ccccl}
g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \cdots & f_1 \\
g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \cdots \longrightarrow & f_2 \\
g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \cdots & f_3
\end{array}$$

e já vimos que ao longo da linha a sequência é crescente.

Logo $\max\limits_{1\leq n\leq k} g_{n,k+1} \geq g_{n,k}$ $\forall n$ com $1\leq n\leq k$

$$\therefore \max_{1\leq n\leq k} g_{n,k+1} \geq \max_{1\leq n\leq k} g_{n,k}$$

Logo, voltando a (*) temos

$$g_{k+1} = \max\left\{\max_{1\leq n\leq k} g_{n,k+1},\ g_{k+1,k+1}\right\} \quad (*)$$

$$\geq \max_{1\leq n\leq k} g_{n,k} = g_k \qquad \therefore g_k \uparrow$$

A sequência g_k é crescente, falta ver que converge a f.
Vamos primeiro provar que $g_k \leq f_k$.

$$g_k = \max_{1\leq n\leq k} g_{n,k}$$

Ora fixando n e fazendo o k variar (o que significa acima que estamos a deslocar-nos na linha) temos que

$$g_{n,1} \quad g_{n,2} \dots g_{n,k} \leq f_n$$

e como $n\leq k$ então $f_n \leq f_k$.

$$\therefore g_{n,k} \leq f_k \quad \forall\, n=1,\dots,k$$

$$\therefore g_k = \max_{1\leq n\leq k} g_{n,k} \leq f_k \qquad \text{re} \qquad g_k \leq f_k$$

Fixemos agora $\tilde{k}$ e $\tilde{k}\leq k$ como $g_k = \max\limits_{1\leq n\leq k} g_{n,k}$ então

$$g_{\tilde{k},k} \leq g_k \leq f_k$$

isto vale para todo k. Logo podemos tomar limites ie

$$\begin{array}{ccccc} g_{\tilde{k},k} & \leq & g_k & \leq & f_k \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \lim_k g_k & & f \end{array}$$

Logo para qualquer $\tilde{k} \leq k$ temos que

$$\lim_k g_k \geq g_{\tilde{k},k} \quad \text{para todo } \tilde{k} \leq k.$$

Agora fixamos $\tilde{k}$ e fazemos o limite em k e obtemos

$\boxed{*}$

$$\begin{array}{ccccc} g_{\tilde{k},k} & \leq & g_k & \leq & f_k \\ \downarrow k & & \downarrow k & & \downarrow k \\ f_{\tilde{k}} & & \lim_k g_k & & f \\ & & \shortparallel & & \\ & & \varphi & & \end{array}$$

Agora temos $f_{\tilde{k}} \leq \varphi \leq f$ que vale para todo $\tilde{k}$. E agora fazemos o limite quando $\tilde{k} \to +\infty$ e lembramos que $f_{\tilde{k}} \uparrow f$.

Daqui resulta que $\varphi = \lim_k g_k = f$ ✓

Observe que até aqui provamos ② ie g_n simples e $g_n \uparrow f$.

Mas então, $I(f) = \lim_n I(g_n)$ e também sabemos que $f_n \uparrow f$ logo $I(f_n) \leq I(f)$ $(f_n \leq f)$. E isto vale para todo n, logo

$$\varlimsup_n I(f_n) \leq I(f).$$

Para provar que $\lim I(f_n) = I(f)$ precisamos de provar que

$$\varliminf_n I(f_n) \geq I(f).$$

Recordemos que $g_k \leq f_k$ (veja $\boxed{*}$ acima)

Então

$$I(f) = \lim_n I(g_n) \overset{\text{monotonia}}{\leq} \varliminf_n I(f_n)$$

✓

observação: Acima tínhamos $f_n \geq 0$, mas o resultado anterior também vale se $f_n \geq g$ e g integrável. Isto é verdade porque agora tomando $h_n = f_n - g$ temos $h_n \geq 0$, $h_n \uparrow f - g$ e pelo resultado anterior aplicado a h_n temos

$$\lim_n I(h_n) = I(f-g) \quad ✡$$

Mas pela linearidade do integral temos

$$\lim_n I(h_n) = \lim_n I(f_n) - I(g)$$

donde obtemos ✡ $\Leftrightarrow \lim_n I(f_n) - I(g) = I(f) - I(g)$ e como g é integrável obtemos $\lim_n I(f_n) = I(f)$ ✓

observação: Consideremos um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e seja $f \geq 0$ e f $\mathcal{F}$-mensurável. Defino $\nu_f : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ da seguinte forma, se $A \in \mathcal{F}$ então

$$\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu$$

Então ν_f é uma medida !

Prova: 1) $\nu_f(\phi) = \int_\phi f \, d\mu = 0$ pois já vimos que o integral de f em conjuntos de medida nula (e note que $\mu(\phi) = 0$ porque μ é uma medida) é igual a zero.

2) ν_f é σ-aditiva

Ora seja $A = \sum_{j \geq 1} A_j$, A_j disjuntos dois a dois
$A_j \in \mathcal{F}$.

Note que $\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu = \int f \mathbb{1}_A \, d\mu = \int \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{A_j} f \, d\mu$

Agora truncamos a série e chamamos

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} f$$

e notamos que $f_n \uparrow f \mathbb{1}_A$.

Lembre que $f \geq 0$, logo pelo Teorema da Convergência monótona temos que $I(f_n) \longrightarrow I(f \mathbb{1}_A)$

Logo $\int_A f \, d\mu = \lim_n \int \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} f \, d\mu = \lim_n \sum_{j=1}^{n} \int \mathbb{1}_{A_j} f \, d\mu$
$= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \nu_f(A_j) = \sum_{j \geq 1} \nu_f(A_j)$.

Observação: Lembre que temos o nosso espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ fixado.
Seja $f \geq 0$ e relembre a definição acima

$$\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Seja agora $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(B) = 0$.
Já sabemos que $\int_B f \, d\mu = 0$ ie $\nu_f(B) = 0$.

Ou seja se $\mu(B) = 0$ então $\nu_f(B) = 0$. Com isso em mente vamos introduzir o seguinte conceito de absoluta continuidade.

Definição: Sejam μ, ν duas medidas definidas em $(\Omega, \mathcal{F})$.
Dizemos que μ é absolutamente contínua com respeito a ν se para $A \in \mathcal{F}$ com $\nu(A) = 0$ então $\mu(A) = 0$.
A notação para este conceito é $\mu \ll \nu$.

Observação: no exemplo acima acabamos de ver que $\nu_f \ll \mu$, pois se $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu = 0$. ie $\nu_f(A) = 0$.

Mais à frente neste curso vamos ver um resultado que nos diz o contrário ie se $\mu \ll \nu$ então $\exists$ uma função $0 \leq \varphi = \frac{d\mu}{d\nu}$ tal que $\forall B \in \mathcal{F}$ $\mu(B) = \int_B \varphi \, d\nu$. $\boxed{*}$
A função φ é a chamada derivada de Radon-Nikodym e o teorema é o teorema de Radon-Nikodym. Este teorema vai ga-

rantir a existência da função φ (quando $\mu \ll \nu$) tal que vale $\boxed{*}$.

Exemplo: Tomemos $\Omega = \mathbb{R}$ e uma função $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f > 0$.

$$\nu_f(A) = \int_A f \, d\lambda \qquad \lambda = \text{Lebesgue}$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ e defina $\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases}$. A medida δ_x é a chamada medida de Dirac em $\{x\}$.

$\boxed{1}$ Observa que $\lambda(\{x\}) = 0$, logo $\nu_f(\{x\}) = 0$. Mas $\delta_x(\{x\}) = 1$

Portanto $\delta_x \not\ll \nu_f$. Pois $\nu_f(\{x\}) = 0$ e $\delta_x(\{x\}) = 1$.

$\boxed{2}$ Seja agora $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ tq $0 \notin (a,b)$. Então $\delta_x(a,b) = 0$, e $\nu_f((a,b)) = \int_{(a,b)} f \, d\lambda > 0$ porque $f \geq 0$ (vamos assumir que no intervalo (a,b), $f(x) > 0$).

E novamente $\nu_f \not\ll \delta_x$.

Aqui temos um exemplo de duas medidas que uma não é absolutamente contínua com respeito à outra e vice-versa.

Observação: Para terminarmos a nossa digressão acerca deste tipo de medidas vamos discutir a noção de integrabilidade uniforme.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço mensurável e $f \in \mathcal{F}$, integrável e $f \geq 0$.
Seja $\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu$. Então $\forall \varepsilon \; \exists \delta > 0$ t.q. $\mu(A) < \delta$ $\Rightarrow \nu_f(A) < \varepsilon$.

Provemos a afirmação. Observa que

$$\int_A f \, d\mu \overset{(*)}{=} \underbrace{\int_{A \cap \{f < n\}} f \, d\mu}_{< n \mu(A)} + \underbrace{\int_{A \cap \{f \geq n\}} f \, d\mu}_{\leq \int f \mathbb{1}_{\{f \geq n\}} d\mu}$$

Logo como f é integrável, temos que $\int f \mathbb{1}_{\{f \geq n\}} d\mu$

$$= \underbrace{\int f \, d\mu}_{< \infty} - \int f \mathbb{1}_{\{f < n\}} d\mu.$$

Agora, pelo TCM como $f \mathbb{1}_{\{f < n\}} \uparrow f$ temos que
$\lim_{n \to \infty} \int f \mathbb{1}_{\{f < n\}} d\mu = \int f \, d\mu < \infty$ Basta agora ver

que dado $\varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0 \; \left| I(f) - I(f \mathbb{1}_{\{f < n\}}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$
Fixamos esse n_0. Agora voltamos a $(*)$ e note que

$$\int_A f \, d\mu \leq n_0 \mu(A) + I(f) - I(f \mathbb{1}_{\{f < n_0\}}) < n_0 \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

e agora escolho δ tq $n_0 \mu(A) < n_0 \delta < \varepsilon/2$.

$\therefore \int_A f \, d\mu < \varepsilon.$

Agora vamos introduzir um resultado de convergência que vai ser muito útil mais à frente no nosso curso.

Lema de Fatou:

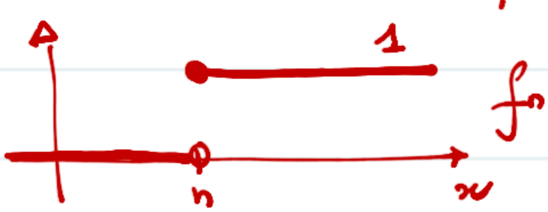
Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções tq $f_n \in \mathcal{F}$ e $f_n \geq 0$.
Então

$$\int \underline{\lim}_n f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int f_n \, d\mu$$

Observe que a desigualdade acima pode ser estrita ie

$$\int \underline{\lim} f_n \, d\mu < \underline{\lim} \int f_n \, d\mu$$

Considere $\mathbb{R}$ com $\mu =$ medida de Lebesgue e $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,+\infty)}(x)$



Então $I(f_n) = +\infty \quad \forall n$.

mas $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \therefore \underline{\lim} f_n = 0$

e $I(f) = 0$.

Prova: Seja $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Ora $\lim_{n\to+\infty} g_n$

$g_n \geq 0$.

$= \underline{\lim}_n f_n$

$$g_{n+1} = \inf_{k\geq n+1} f_k \geq \inf_{k\geq n} f_k = g_n$$

$\therefore\ g_n \uparrow$

e $\quad g_n \leq f_n.$

Então pelo Teorema da Convergência monótona, temos que

$$\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$$

$$\downarrow$$

$$\int \underline{\lim_n} f_n \, d\mu$$

e como $\quad g_n \leq f_n \ \forall n \quad$ então $\quad \int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \ \forall n$

$$\therefore \lim_n \int g_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu$$

$$\shortparallel$$

$$\int \underline{\lim_n} f_n \, d\mu.$$

<ins>Observação</ins>: Na verdade o Lema de Fatou vale pedindo em vez de $f_n \geq 0$ que tenhamos $f_n \geq g$ com g integrável. Pois nesse caso fazemos $h_n = f_n - g \geq 0$, e aplicando Fatou a h_n temos

$$\int \underline{\lim}\, h_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int h_n \, d\mu$$

$$\int \underline{\lim}\, f_n - g \, d\mu \qquad \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu - \int g \, d\mu$$

$$\shortparallel$$

$$\int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu - \int g \, d\mu$$

e g integrável, logo

$$\therefore \int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu. \quad \checkmark$$

Observação: Seja $\{h_n\}_n$ t.q. $h_n \leq 0$. Então se $f_n = -h_n \geq 0$.

Então aplicando Fatou a f_n temos:

$$\int \underline{\lim}\, (-h_n)\, d\mu \leq \underline{\lim} \int -h_n \, d\mu$$

$$\parallel$$

$$-\int \overline{\lim}\, h_n \, d\mu \leq -\overline{\lim} \int h_n \, d\mu$$

$$\therefore \boxed{\int \overline{\lim}\, h_n \, d\mu \geq \overline{\lim} \int h_n \, d\mu}$$

Resumindo:

$$\int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu \qquad f_n \geq 0$$

$$\int \overline{\lim}\, h_n \, d\mu \geq \overline{\lim} \int h_n \, d\mu \qquad h_n \leq 0$$

na verdade: basta pedir $f_n \geq g$, g integ.

Aqui também basta pedir $h_n \leq g$ com g integrável.

O último teorema sobre convergência de integrais que vamos ver é o chamado teorema da convergência dominada (TCD).

Teorema (TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA)

Seja $\{f_n\}_n$ uma seq. de funções t.q. $f_n \in \mathcal{F}$, $|f_n| \leq h$, h integrável, e $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$. Então 1) f é integrável

2) $\int f_n d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$

PROVA: Observa que como $|f_n| \leq h$ então

$$\int |f_n|\, d\mu \leq \int h\, d\mu < \infty$$

$\therefore$ f_n é integravel

Como $|f_n| \leq h$ $\forall n$ então $|f| \leq h$ e portanto f é integrável.

Agora nota que $-h \leq f_n \leq h$, então vamos poder usar o lema de Fatou duas vezes. Então

$$\overline{\lim} \int f_n\, d\mu \leq \int \overline{\lim} f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

$$= \int \underline{\lim} f_n\, d\mu$$

$$\leq \underline{\lim} \int f_n\, d\mu$$

Daqui resulta que

$$\overline{\lim} \int f_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n\, d\mu \leq \overline{\lim} \int f_n\, d\mu$$

Sempre verdade

$$\therefore \underline{\lim} \int f_n\, d\mu = \overline{\lim} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

✓

Espaço Produto

Vamos supor que temos os espaços de medida $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ com $j \in I$, onde I é um conjunto finito de índices. Para simplificar vamos supor que $I = \{1, 2\}$ e vamos definir uma σ-álgebra no espaço produto $\prod_{j \in I} \Omega_j$, ie

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x, y) : x \in \Omega_1, \ y \in \Omega_2\}.$$

Vamos querer definir neste espaço uma σ-álgebra que contém conjuntos a que vamos chamar RETÂNGULOS.

Seja $E_1 \in \mathcal{F}_1$ e $E_2 \in \mathcal{F}_2$ e tomamos o conjunto

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1, \ y \in E_2\}$$

e vamos chamar a estes conjuntos retângulos.

Seja agora

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{E_1 \times E_2 : E_j \in \mathcal{F}_j\}.$$

a classe de conjuntos formada pelos retângulos.

Nestes conjuntos vamos definir

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\, \mu_2(E_2).$$

O objetivo vai ser definir uma função neste tipo de conjunto e depois vamos querer estendê-la à σ-álgebra gerada pelos retângulos, usando os teoremas de extensão que já estudamos.

Definição: (Retângulos) são os conjuntos que se escrevem na forma $E_1 \times E_2$ com $E_1 \in \mathcal{F}_1$ e $E_2 \in \mathcal{F}_2$.

A classe dos retângulos vai ser denotada por $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

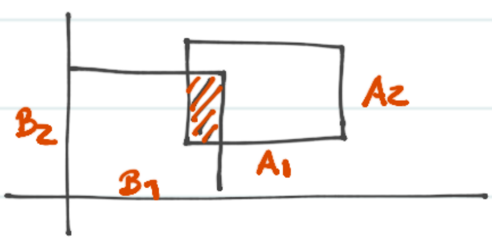
Afirmação $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ é uma semi-álgebra

Temos de verificar as 3 propriedades:

1. $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, trivial já que $\Omega_1 \in \mathcal{F}_1$ e $\Omega_2 \in \mathcal{F}_2$.
2. fechado para a interseção:
   $A, B \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ então $A \cap B \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$?

Ora se $\begin{cases} A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \text{ temos que } A = A_1 \times A_2 \text{ com } A_i \in \mathcal{F}_i \\ B \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \text{ temos que } B = B_1 \times B_2 \text{ com } B_i \in \mathcal{F}_i \end{cases}$

Então $A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = \underbrace{(A_1 \cap B_1)}_{\mathcal{F}_1} \times \underbrace{(A_2 \cap B_2)}_{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$



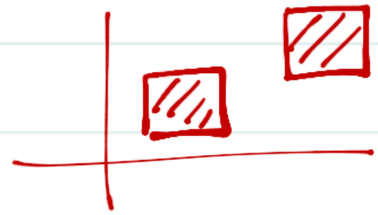
3. Se $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ então $A^c = \sum_{j=1}^{n} A_j$ com $A_j \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$?

Ora se $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ então $A = A_1 \times A_2$ com $A_1 \in \mathcal{F}_1$ e $A_2 \in \mathcal{F}_2$.

Logo $A^c = (A_1 \times A_2^c) \cup (A_1^c \times A_2) \cup (A_1^c \times A_2^c)$

e estes conjuntos são disjuntos e como $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são σ-álgebras, estes conjuntos são retângulos.

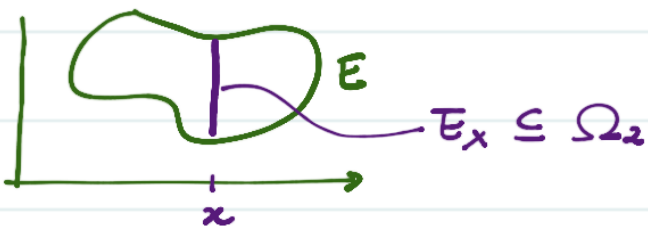
observação: $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ não é uma σ-álgebra (nem sequer é uma álgebra) pois não é fechada para a união, não conseguimos escrever a união de retângulos como um retângulo.



Seja agora $\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$ a σ-álgebra gerada pela semi-álgebra $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, ie a σ-algebra gerada pelos retângulos.

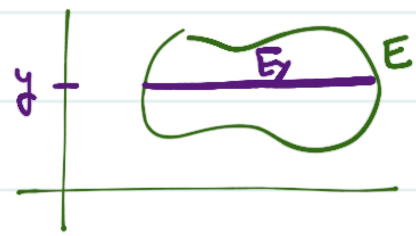
Seja $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Dado $E \subseteq \Omega$ e $x \in \Omega_1$, então definimos a secção transversal de E em x por

$$E_x = \{ y \in \Omega_2 : (x,y) \in E \}$$



Analogamente, para $y \in \Omega_2$ definimos

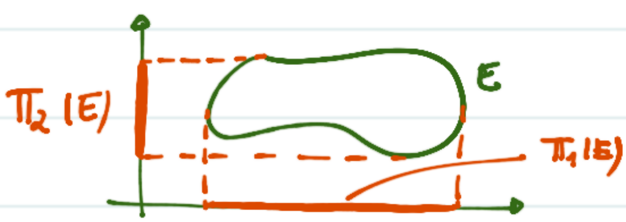
$$E_y = \{ x \in \Omega_1 : (x,y) \in E \}$$



Vamos também definir as projeções ie

$$\pi_1(E) = \{ x \in \Omega_1 : \exists y \in \Omega_2 , (x,y) \in E \}$$

$$\pi_2(E) = \{ y \in \Omega_2 : \exists x \in \Omega_1 , (x,y) \in E \}$$



Lema: Se $E \in \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$ (esta σ-álgebra vamos chamar de σ-álgebra produto) então:

- $\forall x \in \Omega_1 \quad E_x \in \mathcal{F}_2$
- $\forall y \in \Omega_2 \quad E_y \in \mathcal{F}_1$

$(*)$

Prova: se $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ então vale $(*)$ pois

- $x \in \Omega_1$

1) $x \in E_1$ então $E_x = E_2 \in \mathcal{F}_2$

2) $x \notin E_1$ então $E_x = \phi \in \mathcal{F}_2$

Logo a propriedade $(*)$ vale quando $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ie quando E é um retângulo. Mas na verdade queremos provar que $(*)$ vale para todos os elementos da σ-álgebra. Então vamos fazer o seguinte, seja $\mathcal{C} = \{ E \subseteq \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 : E_x \in \mathcal{F}_2 \ \forall x \in \Omega_1 \}$ uma classe de subconjuntos de Ω.

Ora $\mathcal{C} \supseteq$ retângulos (já vimos).

Afirmação: $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra.

① $\Omega \in \mathcal{C}$.

Lembre que $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ e $\Omega_1 \in \mathcal{F}_1$ e $\Omega_2 \in \mathcal{F}_2$, logo Ω é um retângulo e já vimos que $\mathcal{C} \supseteq$ retângulos.

② $E \in \mathcal{C} \Rightarrow E^c \in \mathcal{C}$

Seja $x \in \Omega_1$, então $(E^c)_x = E_x^c$.

Vejamos a igualdade acima

$$(E^c)_x = \{ y \in \Omega_2 : (x,y) \in E^c \} = \{ y \in \Omega_2 : (x,y) \notin E \}$$
$$= \left(\{ y \in \Omega_2 : (x,y) \in E \} \right)^c = (E_x)^c$$

Ora como $E \in \mathcal{C}$ então $E_x \in \mathcal{F}_2 \therefore \underbrace{(E_x)^c}_{\parallel} \in \mathcal{F}_2$

$(E^c)_x \in \mathcal{F}_2$ logo $E^c \in \mathcal{C}$.

③ Sejam $E_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{C}$?

Ora se $E_j \in \mathcal{C}$ então para $x \in \Omega_1$ temos $(E_j)_x \in \mathcal{F}_2$.

Por outro lado vale a seguinte identidade :

$$\boxed{\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j \right)_x = \bigcup_{j \geq 1} (E_j)_x}$$

Provemos a identidade : Ora $\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j \right)_x = \{ y \in \Omega_2 : (x,y) \in \bigcup_{j \geq 1} E_j \}$

$$= \bigcup_{j \geq 1} \{ y \in \Omega_2 : (x,y) \in E_j \}$$

$$= \bigcup_{j \geq 1} (E_j)_x$$

Usando a identidade acima, para $x \in \Omega_1$ temos $(E_j)_x \in \mathcal{F}_2$

logo $\bigcup_{j \geq 1} (E_j)_x \in \mathcal{F}_2$ ie $\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j \right)_x \in \mathcal{F}_2$ logo $\bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{C}$.

$\therefore \mathcal{C}$ é uma σ-álgebra e como $\mathcal{C}$ contém os retângulos, então $\mathcal{C}$ contém a σ-álgebra gerada pelos retângulos ie $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$.

$\therefore \mathcal{C} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$.

Pelo Teorema de Caratheodory vamos poder estender uma medida definida na semi-álgebra $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ a uma medida definida na σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ie a $\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$.

Vamos então definir $\mu : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ da seguinte forma, para $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ie $E = E_1 \times E_2$ e definimos

$$\mu(E) = \mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2)$$

onde μ_1 e μ_2 são medidas definidas em $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$.

Desta forma temos μ definida na semi-álgebra.

(Lembre a convenção $0.\infty = 0$).

Proposição: μ é aditiva em $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

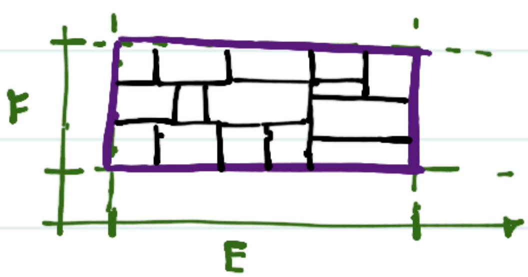
PROVA: Para provarmos a proposição usamos o lema acima.

Sejam $A, A_j, j = 1, \ldots, n \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, tal que

$$A = \sum_{j=1}^{n} A_j$$

Queremos ver que

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \; ?$$



Ora $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, logo $A = E \times F$.

Por outro lado

$$A_x = \begin{cases} \emptyset \; ; & x \notin E \\ F \; ; & x \in E \end{cases}.$$

No lema acima vimos que

$$A_x = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right)_x \underset{?}{=} \bigcup_{j=1}^{n} (A_j)_x$$

na prova do lema vimo que a secção da união é a união da secção (mesmo no caso numeravel) mas à partida não sabemos se a união é disjunta ou não.

Agora observamos que de facto a união acima é disjunta, ie

$$\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right)_x = \sum_{j=1}^{n} (A_j)_x$$

Para precisamos de provar que os conjuntos $(A_j)_x$ são disjuntos dois a dois ie $(A_j)_x \cap (A_i)_x = \phi$.

Observa que $(A_j)_x = \{ y \in \Omega_2 : (x,y) \in A_j \}$

$(A_i)_x = \{ y' \in \Omega_2 : (x,y') \in A_i \}$

Logo se existisse um ponto y_0 em $(A_j)_x$ e $(A_i)_x$ então teríamos $(x, y_0) \in A_i$ e $(x, y_0) \in A_j$ o que contradiria o facto de que $A_i \cap A_j = \phi$.

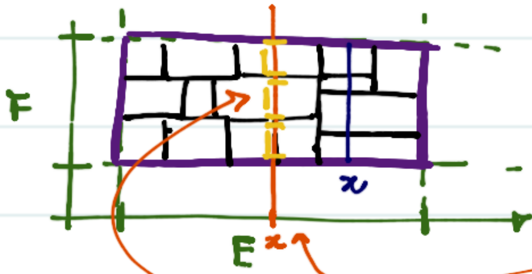
Lembremos que $A_j \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, logo $A_j = E_j \times F_j$ e como vimos acima,

$$(A_j)_x = \begin{cases} \phi, & \text{se } x \notin E_j \\ F_j, & \text{se } x \in E_j \end{cases}$$

Sendo assim, temos $A_x = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right)_x = \sum_{j=1}^{n} (A_j)_x = \sum_{j=1}^{n} F_j \mathbb{1}_{E_j}(x)$

e isto vale para todo x. Então, se $x \in E$ temos

$$\circledast \quad F = A_x = \ldots = \sum_{j=1}^{n} F_j \, \mathbb{1}_{E_j}(x)$$



Quando voltamos à nossa figura, o que estamos a fazer é fixar $x \in E$ e a escrever F como a união disjunta de vários conjuntos

Mudando o ponto x de sítio vamos ter a representação do conjunto F usando outros conjuntos F_j.

Lembremos que $F \in \mathcal{J}_2$, e $F_j \in \mathcal{J}_2$.

Então $\mu_2(F) = \sum_{j=1}^{n} \mu_2(F_j) \, \mathbb{1}_{E_j}(x)$ $\left(\text{lembremos que } \sum_{j=1}^{n} F_j \mathbb{1}_{E_j}(x) = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \text{tq } x \in E_j}} F_j \right)$

Note que em $\circledast$ se $x \notin E$ temos $A_x = \emptyset$ e $\sum_{j=1}^{n} F_j \, \mathbb{1}_{E_j}(x) = \emptyset$ e temos uma igualdade trivialmente.

Então desta forma podemos escrever:

$$\mathbb{1}_E(x) \, \mu_2(F) = \sum_{j=1}^{n} \mu_2(F_j) \, \mathbb{1}_{E_j}(x)$$

Observe que a igualdade anterior pode ser vista como uma igualdade de funções simples, logo podemos tomar o integral e obtemos

$$\boxed{\ast} \quad \int \mathbb{1}_E(x) \, \mu_2(F) \, d\mu_1 = \int \sum_{j=1}^{n} \mu_2(F_j) \, \mathbb{1}_{E_j}(x) \, d\mu_1$$

e agora obtemos $\underbrace{\mu_1(E)\mu_2(F)}_{\overset{\shortparallel}{\mu(A)}} = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\mu_1(E_j)\,\mu_2(F_j)}^{\mu(A_j)}$

e portanto $\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ {V}

Observação: podemos repetir a prova anterior trocando a soma finita pela soma numerável (ie trocando n por $+\infty$) e obtemos o mesmo resultado, o que prova que μ é σ-aditiva.

A única diferença vai ser em $\boxed{*}$, neste caso vamos ter

$$\mu(A) = \int \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(F_j)\, \mathbb{1}_{E_j}(x)\, d\mu_1$$

Para tal basta usar o teorema da convergência monótona, pois $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(F_j)\, \mathbb{1}_{E_j}(x) = \lim_{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_2(F_j)\, \mathbb{1}_{E_j}(x)$ e podemos trocar o limite com o integral.

$\therefore$ μ é σ-aditiva em $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$

Agora para continuar com a nossa extensão, vamos assumir que μ_1 e μ_2 são σ-finitas, ie

$$\Omega_1 = \bigcup_{j\geq 1} E_j \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \bigcup_{j\geq 1} F_j$$

com $\mu_1(E_j) < \infty$ com $\mu_2(F_j) < \infty$

$$\boxed{\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{j\geq 1} E_j \times F_j}$$

$\rightarrow$ nota que $E_j \subseteq \Omega_1$
$F_j \subseteq \Omega_2$

logo $E_j \times F_j \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ e portanto $\bigcup_{j\geq 1} E_j \times F_j \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$.

Por outro lado, quando escrevemos $\Omega_1 = \bigcup_{j\geq 1} E_j$ podemos, sem perda de generalidade assumir que os E_j formam uma sequência crescente, assim, se $(x,y) \in \Omega$, $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$. Como $\Omega_1 = \bigcup_{j\geq 1} E_j$ e $E_j \uparrow$ então $x \in E_j$ para todo $j \geq j_0$. O mesmo vale para y ie $y \in F_j$ $\forall j \geq \tilde{j}$ e portanto $(x,y) \in \bigcup_{j\geq 1} E_j \times F_j$.

Agora temos $\mu(E_j \times F_j) = \mu_1(E_j)\mu_2(F_j) < \infty$ e portanto $\Omega = \bigcup_{j\geq 1} E_j \times F_j$ e $\mu(E_j \times F_j) < \infty$

$\therefore \Omega$ é σ-finito com respeito a μ

Como temos μ σ-aditiva em $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ e Ω é σ-finito com respeito a μ, então μ pode ser unicamente estendida a uma medida definida na σ-álgebra gerada pelos retângulos ie em $\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$.

Com esta construção temos a medida produto definida num espaço $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. A mesma construção pode ser feita quando temos um produto de um nº finito de espaços $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Para $j \geq 1$, sejam $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ espaços de medida.
Seja $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots = \prod_{j\geq 1} \Omega_j$.

Os elementos de Ω são sequências $x \in \Omega$ $x = (x_1, x_2, \dots)$ onde $x_j \in \Omega_j$. Vamos querer repetir a construção que fizemos anteriormente mas agora no espaço produto Ω. Seja $E \subseteq \Omega$ com

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots \quad (*)$$

e vamos querer definir uma medida na σ-álgebra gerada por este tipo de conjuntos.

Seja $\mathcal{F} = \underset{j}{\circledast} \mathcal{F}_j$ a σ-álgebra gerada pelos conjuntos da forma acima.

Vamos querer definir uma medida em conjuntos E da forma $(*)$ da seguinte forma:

$$\mu(E) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_j) \prod_{j=n+1}^{\infty} \mu_j(\Omega_j)$$

e para evitarmos o problema do produto estar bem definido vamos assumir que $\mu_j(\Omega_j) = 1 \; \forall j$ ie μ_j são medidas de probabilidade. Assim a definição acima fica:

se $E = E_1 \times \dots \times E_n \times \Omega_{n+1} \times \dots$ tem-se que

$$\mu(E) = \mu_1(E_1) \times \dots \times \mu_n(E_n)$$

Para simplificar a notação usamos $\Omega^{(n)} = \Omega_n \times \Omega_{n+1} \times \dots$

$$= \prod_{j \geq n} \Omega_j$$

Seja $\mathcal{C} = \{ E \subseteq \Omega \; : \; E \text{ é um cilindro} \}$ ie

$E \in \mathcal{C}$ sse $\exists \, n \geq 1$ e $E_j \in \mathcal{F}_j$ para $j = 1, \dots n$ tal que

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \times \Omega^{(n+1)}.$$

Lema: $\mathcal{C}$ é uma semi-álgebra.

Prova:

① $\Omega \in \mathcal{C}$?

Mas $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n \times \dots$ mas $\Omega_j \in \mathcal{F}_j$ ✓

② $A, B \in \mathcal{C} \implies A \cap B \in \mathcal{C}$

Ora como $A \in \mathcal{C}$ então $A = A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \dots$

$B \in \mathcal{C}$ então $B = B_1 \times \dots \times B_m \times \Omega_{m+1} \times \dots$

para $A_j \in \mathcal{F}_j$ com $1 \leq j \leq n$ e $B_k \in \mathcal{F}_k$ para $1 \leq k \leq m$.

Assumimos que $n \leq m$ (o outro caso é análogo). Então

$A = A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \dots \times \Omega_m \times \Omega_{m+1} \times \dots$

$B = B_1 \times \dots \times B_n \times B_{n+1} \times \dots \times B_m \times \Omega_{m+1} \times \dots$

$$\therefore A \cap B = \underset{\in \mathcal{F}_1}{(A_1 \cap B_1)} \times \dots \times \underbrace{(A_n \cap B_n)}_{\in \mathcal{F}_n} \times \underset{\in \mathcal{F}_{n+1}}{B_{n+1}} \times B_{n+2} \dots \times B_m \times \Omega^{(m+1)}$$

$\therefore$ $A \cap B$ é um cilindro, ie $A \cap B \in \mathcal{C}$.

③ $A \in \mathcal{C} \implies A^c = \sum_{j=1}^{n} A_j$ com $A_j \in \mathcal{C}$

se $A \in \mathcal{C}$ então $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \Omega^{(n+1)}$

logo $$A^c = \sum_{\substack{\eta_1 = \pm 1 \\ \vdots \\ \eta_n = \pm 1}} B_{1,\eta_1} \times \dots \times B_{n,\eta_n} \times \Omega^{(n+1)}$$

e $B_{j,1} = A_j$ e $B_{j,-1} = A_j^c$

Tambem precisamos de na soma incluir a condição $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\eta_j = -1\}} \geq 1$

que nos diz que acima não podemos ter

$B_{j, n_1} = A_j \quad \forall j$ pois nesse caso ter-se-ia

$A^c = A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega^{(n+1)}$ e isso é A e não A^c.

Agora fica fácil de verificar que A^c se escreve como uma união finita de conjuntos disjuntos que são cilindros.

$\boxed{V}$

Seja agora $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$ definida para $A \in \mathcal{C}$ da forma

semi-álgebra dos cilindros.

$A = A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega^{(n+1)}$, $A_j \in \mathcal{F}_j$ como

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j)$$

Já sabemos que se μ for σ-aditiva então podemos estendê-la unicamente à σ-álgebra gerada pelos cilindros.

Vamos agora provar o seguinte resultado.

Lema: μ é aditiva em $\mathcal{C}$.

Prova: Seja $A \in \mathcal{C}$, $A^{(j)} \in \mathcal{C}$ e $A = \sum_{j=1}^{k} A^{(j)}$

Como $A \in \mathcal{C}$ então

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega^{(n+1)}$$

Analogamente $A^{(j)} = A_1^{(j)} \times \dots \times A_{n_j}^{(j)} \times \Omega^{(n_j+1)} \qquad 1 \leq j \leq k$

Seja $m = \max\{n, n_1, \dots, n_k\}$. Então podemos escrever

$$A = A_1 \times \dots \times A_m \times \Omega^{(m+1)}$$

$$A^{(j)} = A_1^{(j)} \times \dots \times A_m^{(j)} \times \Omega^{(m+1)}, \quad 1 \leq j \leq k$$

claro que alguns dos conjuntos A_i ou $A_i^{(j)}$ podem ser iguais a Ω_i.

Ora $\mu(A) = \prod_{l=1}^{m} \mu_l(A_l)$

$$\mu(A^{(j)}) = \prod_{l=1}^{m} \mu_l(A_l^{(j)})$$

Já vimos antes que a medida do lado direito da igualdade ie a medida produto é aditiva (até já vimos que são σ-aditivas) e isso diz-nos que μ é aditiva.

Obs: o argumento anterior não vale quando queremos provar a σ-aditividade porque os conjuntos $A^{(j)}$ podem depender cada vez mais de um nº muito grande de coordenadas e podemos não ter o máximo como acima.

Para contornar este problema vamos provar a σ-aditividade provando a convergência por cima no ϕ.

Temos $\mathcal{C}$ a semi-álgebra dos cilindros.

$$\mu: \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$$

$$A \in \mathcal{C} \quad \text{ie} \quad A = A_1 \times \dots \times A_n \times \Omega^{(n+1)}$$

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j) \quad \text{aditiva.}$$

Pelo Teorema de extensão sabemos que existe uma única extensão de μ a $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ ie à algebra gerada pela semi-álgebra dos cilindros:

$$\nu: \mathcal{A}(\mathcal{C}) \longrightarrow [0,1]$$

E agora vamos provar que ν é contínua por cima no ϕ.

Lema $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{J}) \longrightarrow [0,1]$ é contínua por cima no ϕ.

Prova: lembre que começamos com μ definida em

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots$ mas podíamos ter considerado

$\Omega_2 \times \Omega_3 \times \ldots = \Omega^{(2)}$ e podemos denotar a classe dos cilindros neste

conjunto por $\mathcal{C}^{(2)}$ e a medida correspondente seria $\nu^{(2)}$:

se $E \in \mathcal{C}^{(2)}$ então $E = E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_m \times \Omega^{(m+1)}$

$$\nu^{(2)}(E) = \prod_{j=2}^{m} \mu_j(E_j)$$

No caso geral vamos ter $\nu^{(k)}$ definida em $\mathcal{C}^{(k)}$ estendemos a $\mathcal{A}^{(k)}$

e o espaço de onde partimos é $\Omega^{(k)}$.

Seja agora $A \in \mathcal{C}$, logo $A = E_1 \times \ldots \times E_n \times \Omega^{(n+1)}$, $E_j \in \mathcal{F}_j$.

Seja $x \in \Omega_1$ e definimos a secção de A no ponto x como:

$$A_x \subseteq \Omega^{(2)} = \Omega_2 \times \Omega_3 \times \ldots$$

$$\text{e} \quad A_x \overset{\circledast}{=} \begin{cases} E_2 \times \ldots \times E_n \times \Omega^{(n+1)}, & \text{se } x \in E_1 \\ \phi, & \text{se } x \notin E_1 \end{cases}$$

Afirmação: A função que a cada $x \longrightarrow \nu^{(2)}(A_x)$ é $\mathcal{F}_1$-mensurável

e vale $\mu(A) = \int \nu^{(2)}(A_x)\, \mu_1(dx)$ para $A \in \mathcal{C}$.

Ora como $A \in \mathcal{C}$, então $A = E_1 \times \ldots \times E_n \times \Omega^{(n+1)}$

Se $x \in \Omega_1$ como $A_x = \circledast$ então

$$\nu^{(2)}(A_x) = \begin{cases} \prod_{j=2}^{n} \mu_j(E_j) & \text{se } x \in E_1 \\ 0 & \text{se } x \notin E_1 \end{cases}$$

ie $\nu^{(2)}(A_x) = \mathbb{1}_{E_1}(x) \prod_{j=2}^{n} \mu_j(E_j)$.

Observe que a função $\nu^{2}(A_x)$ é uma função simples pois é uma constante $\prod_{j=2}^{n} \mu_j(E_j)$ vezes uma função indicadora, e como $E_1 \in \mathcal{F}_1$ então $\nu^{(2)}(A_x) \in \mathcal{F}_1$.

Logo podemos integrar e temos

$$\int \nu^{(2)}(A_x)\,\mu_1(dx) = \int \mathbb{1}_{E_1}(x) \prod_{j=2}^{n} \mu_j(E_j)\,\mu_1(dx)$$

$$= \mu_1(E_1) \prod_{j=2}^{n} \mu_j(E_j) = \mu(A). \checkmark$$

Afirmação: A mesma identidade de ✡ vale para $A \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Ora como $A \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ então $A = \sum_{j=1}^{n} A_j$ com $A_j \in \mathcal{C}$.

Por outro lado

$$A_x = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right)_x = \sum_{j=1}^{n} (A_j)_x$$

Agora note que $\int \nu^{(2)}(A_x)\,\mu_1(dx) = \int \nu^{(2)}\left(\sum_{j=1}^{n} (A_j)_x\right)\mu_1(dx)$

$$\overset{\text{aditividade de } \nu^{(2)}}{=} \int \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\nu^{(2)}((A_j)_x)}\,\mu_1(dx)$$

já vimos antes que cada uma destas funções é $\mathcal{F}_1$-mensurável, logo a soma também o é.

$$\overset{\text{linearidade do integral}}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int \nu^{(2)}((A_j)_x)\,\mu_1(dx)}$$

|| porque $A_j \in \mathcal{C}$ e pelo que provámos acima.

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \overset{\text{aditividade de } \nu}{=} \nu(A).$$

Daqui resulta que a igualdade vale para $A \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Agora vamos provar a continuidade por cima no vazio de ν.

Seja $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ com $A_n \downarrow \emptyset$ e queremos provar que $\nu(A_n) \to 0$.

Suponhamos que $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Vamos provar que $\bigcap_{n\geq 1} A_n \neq \emptyset$ e vamos chegar a um absurdo.

Lembre que $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Consideremos a secção $(A_n)_x$. Para cada $x \in \Omega_1$ fixado, $(A_n)_x \in \mathcal{A}^{(2)}(\mathcal{C})$ e na álgebra $\mathcal{A}^{(2)}(\mathcal{C})$ a função $\nu^{(2)}((A_n)_x)$ está bem definida. Seja agora

$$B_n := \{x \in \Omega_1 : \nu^{(2)}((A_n)_x) \geq \varepsilon/2\}$$

- observe que, pelo que vimos acima, a função que a cada $x \in \Omega_1$ associa $\nu^{(2)}((A_n)_x)$ é uma função mensurável, logo o conjunto B_n como é a pré-imagem do conjunto $[\varepsilon/2, +\infty]$ então $B_n \in \mathcal{F}_1$.
- $B_n \downarrow$ ie $B_n \supseteq B_{n+1}$

Ora isto é uma consequência do facto de que $(A_n)_x \supseteq (A_{n+1})_x$. E por monotonia de $\nu^{(2)}$ temos $\nu^{(2)}((A_n)_x) \geq \nu^{(2)}((A_{n+1})_x)$. Logo se $x \in B_{n+1} \Rightarrow x \in B_n$.

Agora, por hipótese $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Pela identidade ✡ temos que

$$\varepsilon \leq \nu(A_n) = \int \nu^{(2)}((A_n)_x)\, \mu_1(dx)$$

$$= \int_{B_n} \overbrace{\nu^{2}((A_n)_x)}^{\leq 1} \mu_1(dx) + \overbrace{\int_{B_n^c} \nu^{(2)}((A_n)_x)\, \mu_1(dx)}^{< \varepsilon/2}$$

$$\leq \mu_1(B_n) + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\mu_1(B_n^c)}_{1-\mu_1(B_n)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\mu_1(B_n)\right) + \mu_1(B_n)$$

Assim obtemos $\quad \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu_1(B_n)\left(1-\varepsilon/2\right) \leq \mu_1(B_n)$

Até aqui conseguimos criar $\underset{\mathcal{F}_1}{\overset{\cap}{B_n}} \downarrow$ com $\mu_1(B_n) \geq \varepsilon/2$.

Logo $\quad \mu_1\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right) = \lim_n \mu_1(B_n) \geq \varepsilon/2 > 0$

$$\bigcap_{n\geq 1} B_n \neq \phi$$

Seja $\underset{\Omega_1}{\overset{\cap}{x_1}} \in \bigcap_{n\geq 1} B_n$, então $x_1 \in B_n \ \forall n \Rightarrow \nu^{(2)}\big(\underbrace{(A_n)_{x_1}}_{\subset\, \Omega^{(2)}}\big) \geq \varepsilon/2 \ \forall n.$

$(A_n)_{x_1} \downarrow$

Lembremos que partimos de uma sequência de conjuntos $\overset{\in \mathcal{A}(\mathcal{C})}{A_n} \subseteq \Omega$, $A_n \downarrow$ e tais que $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Daí consideramos as secções para um ponto $x_1 \in \Omega_1$ e obtivemos $\underset{\mathcal{A}^{(2)}}{\overset{\cap}{(A_n)_{x_1}}} \subseteq \Omega^{(2)}$ t.q. $\nu^{(2)}((A_n)_{x_1}) \geq \varepsilon/2$ e $(A_n)_{x_1} \downarrow$.

Agora vamos iterar este argumento. No m-ésimo passo, vamos encontrar $(x_1,\dots,x_m) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_m$, $(A_n)_{x_1,\dots,x_m} \in \mathcal{A}^{(m+1)}$, $(A_n)_{x_1,\dots,x_m} \supseteq (A_{n+1})_{x_1,\dots,x_m}$

e tal que $\nu^{(m+1)}\left((A_n)_{x_1,\dots,x_m}\right) \geq \frac{\varepsilon}{2^m}$ $\forall n$.

Afirmação: $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \bigcap_{n\geq 1} A_n$. (e chegaremos a um absurdo) pois $A_n \downarrow \phi$.

PROVA: Vamos fixar n e provar que $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in A_n$.

Lembre que $A_n \in A(\mathcal{C})$. Os elementos de $A(\mathcal{C})$ são uniões finitas disjuntas de cilindros, e portanto dependem de um nº finito de coordenadas. Logo como $A_n \in A(\mathcal{C})$, $\exists$ $m_n \geq 1$ tal que

se $(z_1, z_2, \dots)$ $z_j = y_j$ para $1 \leq j \leq m_n$ (I)

então $(y_1, y_2, \dots) \in A_n \iff (z_1, z_2, \dots) \in A_n$

Observe que se A é um cilindro ie $A = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \times \Omega^{(n+1)}$ para algum n, então $\underset{(x_1, x_2, \dots)}{\overset{x}{\shortparallel}} \in A$ se $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, \dots$

Logo se um elemento x está em A e coincide com z nas primeiras n coordenadas então $\vec{z}$ está em A e vice-versa.

Com isto fica verificada a propriedade (I) para cilindros e para elementos da semi-álgebra. Agora queremos estender à algebra gerada pela semi-álgebra. Mas como os elementos da álgebra gerada pela semi-álgebra são escritos como uniões finitas disjuntas de cilindros, então

(I) também vale para esses elementos. (verifique).

Lembremos que $\nu^{(m+1)}\left((A_n)_{x_1,\dots,x_m}\right) \geq \frac{\varepsilon}{2^k} > 0 \quad \forall n$. Em particular, concluímos que $(A_n)_{x_1,\dots,x_m} \neq \phi, \ \forall n$

Logo, para $m = m_n$ temos que $(A_n)_{x_1,\dots,x_{m_n}} \neq \phi$

e $\exists\, (y_{m_n+1}, y_{m_n+2}, \dots) \in (A_n)_{x_1,\dots,x_{m_n}}$.

da seção ao conjunto basta adicionar os pontos que faltam.

Mas então $(x_1,\dots,x_{m_n}, y_{m_n+1}, y_{m_n+2}, \dots) \in A_n$

Mas agora temos que nos lembrar da escolha de m_n na propriedade I, vimos que se duas sequências têm os m_n primeiros termos iguais então se uma está em A_n a outra também está e vice-versa.

Logo a sequência $(x_1,\dots,x_{m_n}, x_{m_n+1},\dots) \in A_n, \forall n$

e isto era exatamente o que queríamos fazer.

Logo $\bigcap_{n\geq 1} A_n \neq \phi$. Absurdo! ✓

Observação: Acabamos de provar que ν é contínua por cima no ϕ.

Como ν é finita então ν é σ-aditiva.

Logo pelo teorema de extensão, μ ou ν pode ser estendida à σ-álgebra gerada pelos cilindros ie $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. ($\sigma$-álgebra produto)

e $\boxed{\mu(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \times \Omega^{(n+1)}) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_j)}$ Medida produto no espaço produto de um nº numerável de espaços

Agora que construímos a medida produto num produto numerável de espaços, vamos discutir a questão da ordem de integração, ie vamos discutir o chamado TEOREMA DE FUBINI.

Sejam $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ espaços tais que Ω_j é μ_j σ-finito $(j \in \{1,2\})$
Já sabemos como construir a medida produto $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ definida na σ-álgebra gerada pelos retângulos $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$. Seja agora

$$f : \overset{\Omega_1 \times \Omega_2}{\overset{\parallel}{\Omega}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$f \in \mathcal{F}$. Sabemos definir $I(f) = \int f \, d\mu$ e vamos supor que f é μ-integrável. Fixamos $x \in \Omega_1$ e vamos definir a secção da função f em x ie $f_x \in \mathcal{F}_2$.

A questão que queremos responder é: Será que

$$\int \underbrace{\left(\int f_x(y) \, \mu_2(dy) \right)}_{(*)} \mu_1(dx) \overset{?}{\underset{(\star)}{=}} \int f \, d\mu = I(f)$$

Como esta igualdade é simétrica em x e y temos também:

$$\int \left(\int f_y(x) \, \mu_1(dx) \right) \mu_2(dy) = I(f) \, ?$$

Antes de avançarmos vejamos que no integral em $(*)$ há duas questões sobre a mensurabilidade que teremos de resolver:

① a função que a $y \in \Omega_2$ associa $f_x(y)$ é $\mathcal{F}_2$ - mensurável e por isso faz sentido integrar com respeito a μ_2.

② a função que a $x \in \Omega_1$ associa $\int f_x(y)\, \mu_2(dy)$ é $\mathcal{F}_1$-mensurável e por isso faz sentido integrar com respeito a μ_1.

Depois vamos ter que provar a igualdade.

A ideia da prova consiste em primeiro tratar de funções simples ie $f \in \mathcal{S}_+$ e depois estendemos como já fizemos antes.

Antes de avançarmos com a prova do resultado vamos introduzir a noção de secção de uma função.

SECÇÃO DE UMA FUNÇÃO $\quad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$

Seja $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathcal{F}$-mensurável.

Fixado $x \in \Omega_1$, definimos
$$f_x : \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$y \longrightarrow f(x,y)$$

Analogamente, se $y \in \Omega_2$ definimos
$$f_y : \Omega_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longrightarrow f(x,y)$$

Estas funções dizem-se as secções de f em x, y respetivamente.

Observação: Se $f \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$ então $f_x \in \mathcal{F}_2$.

Provemos esta observação. Ora, mostrar que $f_x \in \mathcal{F}_2$ significa que $\forall B \in \overline{\mathcal{B}}$ $\quad f_x^{-1}(B) \in \mathcal{F}_2$?

Nota que
$$f_x^{-1}(B) = \{ y \in \Omega_2 : f_x(y) \in B \}$$
$$= \{ y \in \Omega_2 : f(x,y) \in B \}$$

$$= \{ y \in \Omega_2 : (x,y) \in f^{-1}(B) \}$$
$$= (f^{-1}(B))_x$$

Como $f \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$, já sabemos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ e pelo que já vimos acima, temos que $(f^{-1}(B))_x \in \mathcal{F}_2$.

observação: Afirmamos agora que a função

$$(1) \quad x \longrightarrow \mu_2(A_x) \quad \text{onde} \quad A \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$$

é uma função $\mathcal{F}_1$- mensurável.

Analogamente $y \longrightarrow \mu_1(A_y)$ onde $A \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$

é uma função $\mathcal{F}_2$- mensurável.

Provemos agora a observação. Vamos analisar (1).

Vamos supôr inicialmente que $\mu_2(\Omega) < \infty$ e μ_1 é uma medida finita. Depois vamos fazer a prova no caso geral usando o facto de estarmos a trabalhar com espaços σ-finitos.

- Suponha que A é um retângulo i.e. $A = E \times F$ com $E \in \mathcal{F}_1$, $F \in \mathcal{F}_2$.

$$A_x = (E \times F)_x = \begin{cases} F, & \text{se } x \in E \\ \phi, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Então $\mu_2(A_x) = \underbrace{\mu_2(F)}_{\in \mathbb{R}} \; \underbrace{\mathbb{1}_E(x)}_{\widehat{\mathcal{F}_1} \text{ porque } E \in \mathcal{F}_1}$

$\therefore \mu_2(A_x) \in \mathcal{F}_1$ e a observação (1) fica provada para

A sendo um retângulo. Agora podemos integrar esta função com respeito a μ_1 e obtemos:

$$\int \mu_2(A_x)\,\mu_1(dx) = \int \mu_2(F)\,\mathbb{1}_E(x)\,\mu_1(dx)$$
$$= \mu_1(E)\,\mu_2(F) = \mu(E\times F) = \mu(A)$$

e assim a igualdade ✡ fica provada.

• Agora vamos estender a igualdade à algebra gerada pelos retângulos que vamos denotar por $A(\mathscr{C})$. Sabemos que os elementos de $A(\mathscr{C})$ são uniões finitas disjuntas de retângulos. Logo se $A \in A(\mathscr{C})$ então $A = \sum_{j=1}^{n} A_j$ com A_j um retângulo.

Logo $A_j = E_j \times F_j$ com $E_j \in \mathcal{F}_1$ e $F_j \in \mathcal{F}_2$

Já vimos acima que

$$A_x = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right)_x = \sum_{j=1}^{n} (A_j)_x,$$

também já vimos que $A_x \in \mathcal{F}_2$ e então

$$\mu_2(A_x) = \mu_2\left(\sum_{j=1}^{n} (A_j)_x\right) \underset{\text{disjuntos}}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mu_2((A_j)_x)}_{\substack{\parallel \\ \mu_2(F_j)\mathbb{1}_{E_j}(x)}}$$

$\therefore\ \mu_2(A_x) \in \mathcal{F}_1$ ($\mu_2(A_x)$ é de facto uma função $\mathcal{F}_1$ simples)

Agora podemos integrar com respeito a μ_1 e obtemos

$$\int \mu_2(A_x)\,d\mu_1 \overset{*}{=} \int \sum_{j=1}^{n} \mu_2(F_j)\,\mathbb{1}_{E_j}(x)\,\mu_1(dx)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \mu_2(F_j)\,\mu_1(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j\times F_j) = \sum_{j=1}^{n}\mu(A_j) = \mu(A)$$

Acima em ⊛ podiamos ter usado diretamente o facto de que sabemos que a igualdade (✡) vale para retângulos e os A_j são retângulos.

• Agora vamos estender à σ-algebra $\mathcal{F}$, i.e queremos provar a observação (1) e a identidade (✡) para elementos em $\mathcal{F}$.

Agora vamos usar um argumento que já usamos várias vezes neste curso e que permite relacionar classes monótonas com σ-álgebras.

Seja $\mathcal{G} = \left\{ A \in \mathcal{F} : \mu_2(A_x) \in \mathcal{F}_1 \text{ e } \int \mu_2(A_x)\,\mu_1(dx) = \mu(A) \right\}$

O objetivo consiste em provar que $\mathcal{G}$ é uma σ-algebra.

Já vimos que $\mathcal{C}$ contém os retângulos e portanto concluiremos que $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{F}$. Mas por definição $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ e resultará que $\mathcal{C} = \mathcal{F}$.

Aqui está, mais uma vez, um exemplo em que é dificil provar que $\mathcal{C}$ é fechado por uniões numeráveis. Isto se deve ao facto de que se $A = \bigcup_{j\geq 1} A_j$ com A_j um retângulo, como $\mu_2\left(\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right)_x\right) = \mu_2\left(\bigcup_{j\geq 1} (A_j)_x\right)$ mas agora não conseguimos expandir a expressão atrás porque não sabemos se é uma união disjunta. Uma alternativa que temos é provar que $\mathcal{G}$ é uma classe monótona. Como $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{C} = \{\text{retângulos}\}$, vamos concluir que $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{B})$ (i.e a classe monótona gerada pelos retângulos) e por um lema que já vimos na primeira parte do curso vamos concluir que $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ e pronto, com isto terminámos a prova.

Afirmação: $\mathcal{G}$ é uma classe monótona.

Provemos então a afirmação. Sejam $A_j \uparrow A$, $A_j \in \mathcal{Y}$, queremos provar que $A \in \mathcal{Y}$. Ora como $A = \bigcup_{j \geq 1} A_j$ então $A_x = \bigcup_{j\geq 1} (A_j)_x$

Como $A_j \uparrow$ então $(A_j)_x \uparrow$ e de facto $(A_j)_x \uparrow A_x$, $\forall x \in \Omega_1$.

Logo

porque μ_2 é uma medida, logo é contínua por baixo.

$$(*) \quad \mu_2(A_x) = \lim_{j\to+\infty} \mu_2((A_j)_x)$$

Agora lembremos que $A_j \in \mathcal{Y}$, logo $\mu_2((A_j)_x) \in \mathcal{F}_1$ e como o limite de funções mensuráveis é uma função mensurável, resulta que $\mu_2(A_x) \in \mathcal{F}_1$.

Agora podemos integrar $(*)$ com respeito a μ_1 e resulta

$$\int \mu_2(A_x)\, \mu_1(dx) = \int \lim_j \mu_2((A_j)_x)\, \mu_1(dx)$$

Observa agora que $\{\mu_2((A_j)_x)\}_j$ é uma sequência monotona e $\mu_2((A_j)_x)$ toma valores positivos, logo podemos aplicar o Teorema da convergência monotona para trocar o limite com o integral. Assim obtemos

$$\int \mu_2(A_x)\,\mu_1(dx) = \lim_j \int \mu_2((A_j)_x)\,\mu_1(dx) \overset{A_j \in \mathcal{Y}}{=} \lim_j \mu(A_j) = \mu(A)$$

cont. por baixo de μ.

∇ !

$\therefore$ $\mathcal{Y}$ é fechada para sequências crescentes.

Agora vamos provar que $\mathcal{Y}$ é fechada para sequências decrescentes ie

$A_j \downarrow A$ com $A_j \in \mathcal{Y} \Rightarrow A \in \mathcal{Y}$?

Ora como $A_j \in \mathcal{Y}$, já sabemos que $\mu_2((A_j)_x) \in \mathcal{F}_1$ e pelo mesmo argumento que usamos acima, concluímos que $\mu_2(A) \in \mathcal{F}_1$ (aqui vamos precisar de usar o facto de que a medida μ_2 é finita).

Integrando com respeito a μ_1 e repetindo os passos em ∇ obtemos o que queremos.

$\therefore \mathcal{Y}$ é uma classe monótona

$\therefore \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}.$

Finalmente, terminámos a prova mas usamos as hipóteses de que as medidas μ_1 e μ_2 eram finitas. Para terminar a prova falta retirarmos estas hipóteses e assumir apenas a σ-finitude, ie

$\exists\, B_n \in \mathcal{A}^{(1)}(\mathcal{C})$ com $\Omega_1 = \bigcup_{n \geq 1} B_n$

$\mu_1(B_n) < \infty \ \forall n.$

$\exists\, \tilde{B}_n \in \mathcal{A}^{(2)}(\mathcal{C})$ com $\Omega_2 = \bigcup_{n \geq 1} \tilde{B}_n$

$\mu_2(\tilde{B}_n) < \infty \ \forall n.$

Lembre que podemos sempre assumir, sem perda de generalidade, que $A_n \uparrow$, $B_n \uparrow$.

algebra gerada pelos retângulos em Ω_2

Seja $F_n = B_n \times \tilde{B}_n$. Note que $F_n \in \mathcal{C}$ e $\mu(F_n) = \mu_1(B_n)\mu_2(\tilde{B}_n) < \infty$ e $\bigcup_{n \geq 1} F_n = \Omega_1 \times \Omega_2$. Claramente que $F_n = B_n \times \tilde{B}_n \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ e dado $(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, então $\exists\, n$ tq $x \in B_n$ e $\exists\, m$ tq $y \in \tilde{B}_m$ e como os conjuntos são crescentes então $(x,y) \in B_j \times \tilde{B}_j$ para todo $j \geq n \vee m$.

Consideremos agora o conjunto $A \cap F_n$ e analisemos a secção ie $(A\cap F_n)_x$, ora como $A \in \mathcal{F}$ então a função

$$x \longrightarrow \mu_2\big((A\cap F_n)_x\big) \in \mathcal{F}_1 \quad \forall n \geq 1.$$

Ora $(A\cap F_n)_x \uparrow A_x$ | Lembre que $F_n \uparrow \Omega$)

e portanto $\mu_2((A\cap F_n)_x) \uparrow \mu_2(A_x)$

Como as funções $\mu_2((A\cap F_n)_x) \in \mathcal{F}_1$ então o limite $\mu_2(A_x) \in \mathcal{F}_1$.

Além disso, como $A \in \mathcal{F}$,

$$\int \mu_2((A\cap F_n)_x)\,\mu_1(dx) = \mu(A\cap F_n)$$ porque agora como estamos a restringir a medida a F_n estamos no caso anterior pois $\mu(F_n)<\infty$. Agora fazemos o limite em n da última igualdade e temos

$$\int \mu_2((A\cap F_n)_x)\,\mu_1(dx) = \mu(A\cap F_n)$$

$\downarrow n\to\infty$ T.C.M. $\qquad\qquad \downarrow$

$\int \mu_2(A_x)\,\mu_1(dx) \qquad\qquad \mu(A)$ porque $A\cap F_n \uparrow A$ e μ é uma medida.

$$\therefore \mu(A) = \int \mu_2(A_x)\,\mu_1(dx)$$

Corolário: Seja $A \in \mathcal{F}$. Sabemos que

$$\mu(A) = \int \mu_2(A_x)\,\mu_1(dx).$$

Então $\boxed{1}$ se $\mu(A)=0$ então $\mu_2(A_x)=0$ μ_1-q.c.

$\boxed{2}$ o recíproco também vale ie se $\mu_2(A_x)=0$ q.c. $\Rightarrow \mu(A)=0$.

Observação: o resultado anterior é quase certamente. Ora vejamos o seguinte exemplo:

Seja $A_x = [0,1]$.

$\lambda(A_x) = 1$ $\lambda =$ Lebesgue

$\lambda^2(A) = 0$. λ^2 med de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$

O nosso objetivo agora é estender o resultado anterior para funções positivas. Nas condições do Teorema anterior temos o seguinte resultado.

Teorema: (Teorema de Tonelli)

Sejam $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ para $j = 1,2$ espaços mensuráveis, Ω_j $\mu_j - \sigma$-finito.

Seja $f \in \mathcal{F}$, $f \geq 0$. Então ① $x \longrightarrow \int f_x(y)\mu_2(dy)$ é $\mathcal{F}_1$ mensurável, e

② $$\int\left[\int f_x(y)\,\mu_2(dy)\right]\mu_1(dx) = \int f\,d\mu = \int\left[\int f_y(x)\mu_1(dx)\right]\mu_2(dy).$$

Em ① a função $y \longrightarrow \int f_y(x)\mu_1(dx)$ é $\mathcal{F}_2$-mensurável (vamos ver que a prova neste caso é análoga à prova de ①.)

Prova: Como temos feito até agora a prova vai começar por analisar funções simples e depois vamos estender.

① Seja $f = c\,\mathbb{1}_A$ com $A \in \mathcal{F}$.

Então $f_x(y) = f(x,y) = c\,\mathbb{1}_A(x,y) = c\,\mathbb{1}_{A_x}(y)$.

O resultado do teorema que acabámos de provar diz-nos que o resultado deste teorema vale para esta função $f = c\mathbb{1}_A$:

$$\int f_x(y)\,\mu_2(dy) = \int c\,\mathbb{1}_{A_x}(y)\,\mu_2(dy) = c\,\mu_2(A_x)$$

e $\mu_2(A_x)$ como função de x é $\mathcal{F}_1$-mensurável e quando integramos com respeito a μ_1 obtemos

$$\int\left[\int f_x(y)\,\mu_2(dy)\right]\mu_1(dx) = \int c\,\mu_2(A_x)\,\mu_1(dx)$$

$$= c\int \mu_2(A_x)\,\mu_1(dx)$$

$$\underset{\substack{\text{pelo resultado}\\ \text{do teorema}\\ \text{anterior}}}{=} c\,\mu(A) \underset{f = c\mathbb{1}_A}{=} \int f\,d\mu.$$

Isto permite-nos concluir que o teorema vale para funções da forma $f = c\,\mathbb{1}_A$ com $c \geq 0$ e $A \in \mathcal{F}$.

2. Agora vamos assumir que f é uma função simples ie

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j\,\mathbb{1}_{A_j}, \quad c_j \geq 0 \text{ e } A_j \in \mathcal{F}$$

Seja $x \in \Omega_1$, então $f_x = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\,\mathbb{1}_{A_j}\right)_x = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j\,\mathbb{1}_{A_j}\right)_x$

$= \sum_{j=1}^{n} c_j\,\mathbb{1}_{(A_j)_x}$ esta função é $\mathcal{F}_2$-mensurável por ser soma de funções $\mathcal{F}_2$-mensuráveis.

Logo podemos integrar com respeito a μ_2 e obtemos

$$\int f_x(y)\,\mu_2(dy) = \int \sum_{j=1}^{n}\left(c_j\,\mathbb{1}_{A_j}\right)_x\,\mu_2(dy)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\int \left(c_j\,\mathbb{1}_{A_j}\right)_x\,\mu_2(dy)}^{\text{estas funções são } \mathcal{F}_1\text{-mensuráveis}}$$

Logo $\int f_x(y)\,\mu_2(dy)$ é uma função (em x) que é $\mathcal{F}_1$-mensurável.

As funções $\int f_x(y)\,\mu_2(dy)$ são não-negativas porque lembre que $f \geq 0$.

Então tomando o integral com respeito a μ_1 temos:

$$\int\left[\int f_x(y)\,\mu_2(dy)\right]\mu_1(dx) = \int \sum_{j=1}^{n}\left\{\int (c_j \mathbb{1}_{A_j})_x\ \mu_2(dy)\right\}\mu_1(dx)$$

$$\underset{\text{linearidade}}{=} \sum_{j=1}^{n} \int\left[\int (c_j \mathbb{1}_{A_j})_x\ \mu_2(dy)\right]\mu_1(dx)$$

pela 1ª parte do Teorema

$$= \sum_{j=1}^{n} \int c_j \mathbb{1}_{A_j}\, d\mu$$

$$= \int \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{A_j}\, d\mu = \int f\, d\mu$$

Até aqui provamos o resultado para funções simples.

3 Agora vamos provar o resultado para funções mensuráveis positivas.

Seja $f \in \mathcal{F}$, $f \geq 0$. Sabemos pelo teorema de aproximação que existe uma sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ com f_n uma função simples t.q. $f_n \uparrow f$.

Logo para $x \in \Omega_1$ temos que $(f_n)_x \uparrow f_x$.

Integrando com respeito a μ_2 temos

$$\underbrace{\int (f_n)_x\ \mu_2(dy)}_{\substack{\text{estas funções (de } x)\\ \text{são } \mathcal{F}_1\text{- mensuráveis}}} \xrightarrow[\text{T.C.Mon.}]{n\to+\infty} \int (f)_x\ \mu_2(dy)$$

Logo o limite $\int (f)_x\,\mu_2(dy)$ também é $\mathcal{F}_1$- mensurável.

Agora podemos calcular o integral com respeito a μ_1 e temos:

$$\int \left[\int (f_n)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{T.C. Monótona}} \int \left[\int f_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

Observe agora que f_n é uma função simples então

$$\int \left[\int (f_n)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) = \int f_n \, d\mu$$

Mas agora como $f_n \uparrow f$ aplicando novamente o teorema da convergência monótona temos que $\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$.

Então, concluimos que

$$\int f \, d\mu = \int \left[\int f_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

o que conclui a prova do teorema. ✓

Agora vamos finalmente enunciar e provar o Teorema de Fubini.

Teorema de Fubini: Sejam $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ para $j = 1, 2$, espaços mensuráveis, Ω_j é μ_j σ-finito. Seja $f \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ e f μ-integrável. Então a função $x \longrightarrow \int f_x(y) \, \mu_2(dy) \in \mathcal{F}_1$ e

$$\int \left[\int f_x(y) \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) = \int f \, d\mu$$

$$\| $$

$$\int \left[\int f_y(x) \mu_1(dx) \right] \mu_2(dy)$$

Prova: Observe que como f é integrável temos que $I(f^+) < \infty$ e $I(f^-) < \infty$. Logo e como f^+ é positiva temos:

$$\infty > \int f^+ d\mu \underset{\substack{\text{Pelo} \\ \text{resultado} \\ \text{do Teorema} \\ \text{de Tonelli}}}{=} \int \left[\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

Então sabemos, pelas propriedades que já vimos antes que a função

$$\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) < \infty \quad \mu_1 - q.c.$$

Agora repare que pode acontecer de termos um x para o qual

$$\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) = +\infty \quad e \quad \int (f^-)_x \, \mu_2(dy) = -\infty \text{ e}$$

nesse caso não faz sentido a diferença

$$\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) - \int (f^-)_x \, \mu_2(dy) .$$

Para ultrapassarmos este problema fazemos o seguinte.

Seja

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \, , & \text{se } \int (f^+)_x \mu_2(dy) < \infty \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

como a função $\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \in \mathcal{F}_1$ então a função φ^+ também $\in \mathcal{F}_1$, pois

$$\varphi^+(x) = \int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \, \mathbb{1}_{\{\int (f^+)_x \mu_2(dy) < \infty\}} .$$

Analogamente podemos definir φ^- da seguinte forma:

$$\psi^-(x) = \begin{cases} \int (f^-)_x \, \mu_2(dy) \, , & \text{se} \quad \int (f^-)_x \mu_2(dy) < \infty \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

Seja $\psi(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x)$. Observa que $\psi \in \mathcal{F}_1$.

Observe agora que

$$\int \left(\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) \underset{\text{T. Tonelli}}{=\!=} \int f^+ \, d\mu < \infty$$

$$\therefore \int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \in \mathcal{F}_1 \text{ e é integravel com respeito a } \mu_1$$

Logo se $E = \{ x : \int (f^+)_x \, \mu_2(dy) < \infty \} \in \mathcal{F}_1$

$$\text{e} \quad \psi^+ = \int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \, \mathbb{1}_E$$

$$\therefore \int \psi^+ \, d\mu_1 = \int \left[\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(E) < \infty.$$

Analogamente $\psi^- \in \mathcal{F}_1$ e $\int \psi^- \, d\mu_1 < \infty$.

Finalmente $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$

$$= \int \left[\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) - \int \left[\int (f^-)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

Como $\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \underset{\mu \, q.c.}{=} \psi^+$ e $\int (f^-)_x \, \mu_2(dy) \underset{\mu \, q.c.}{=} \psi^-$

então os integrais coincidem, logo a identidade acima fica:

$$\int f \, d\mu = \int \varphi^+ d\mu_1 - \int \varphi^- d\mu_1$$

Agora, como as funções φ^+ e φ^- são finitas em todos os pontos de Ω_1, e além disso são positivas e integraveis, temos que

$$\int f \, d\mu = \int \varphi^+ - \varphi^- \, d\mu = \int \varphi \, d\mu.$$

$$= \int \left[\int (f^+)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) - \int \left[\int (f^-)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

$$= \int \left[\int (f^+)_x - (f^-)_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

$$= \int \left[\int f_x \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx)$$

Note que podemos trocar a hipótese de f integravel com respeito a μ por outra condição, vejamos o próximo teorema.

Teorema: Sejam $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ $j = 1,2$ Ω_j μ_j σ-finito. Seja $f \in \mathcal{F}$.

Se $\int \left[\int |f_x| \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) < \infty$

então as conclusões do teorema anterior (ie Fubini) são válidas.

Prova: observa que $f_x^+ \leq |f_x|$ uma vez que

e $f_x^- \leq |f_x|$

$|f| = f^+ + f^-$.

Logo $\int \left[\int f_x^+ \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) < \infty$ e $\int \left[\int f_x^- \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) < \infty$

Por outro lado, pelo Teorema de Tonelli temos que

$$\infty > \int \left[\int f_x^+ \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) = \int f^+ d\mu$$

$$\infty > \int \left[\int f_x^- \, \mu_2(dy) \right] \mu_1(dx) = \int f^- d\mu$$

Logo como $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu < \infty \Rightarrow f$ integrável e agora estamos nas condições do Teorema de Fubini. $\checkmark$

A decomposição de Hahn-Jordan

Estamos de volta ao cap 3.2 do livro do Taylor e o objectivo desta exposição é justificar porque temos trabalhado sempre com funções definidas em classes de conjuntos que tomam valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, ie que tomam valores não negativos.

Para tal seja $\nu: \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ onde $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra.

Vamos assumir que ν é σ-aditiva ie

1) $\nu(\phi) = 0$

2) $A = \sum_j A_j$, $A_j, A \in \mathcal{F}$ então $\nu(A) = \sum_{j \geq 1} \nu(A_j)$

Antes de enunciarmos o teorema de Hahn-Jordan, que basicamente nos diz que é possível escrever ν como diferença de duas medidas, vamos deduzir algumas propriedades de ν que serão úteis na prova dos resultados.

__obs__ 1 Se $E, F \in \mathcal{F}$ com $E \cap F = \phi$

então $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$ (porque a σ-aditividade implica a aditividade). E como ν está bem definida não podemos ter $\nu(E) = +\infty$ e $\nu(F) = -\infty$ senão não faria sentido a igualdade acima. E portanto não podemos ter dois conjuntos E, F com as propriedades acima. Então quando dizemos que ν é σ-aditiva estamos a assumir que tais conjuntos não existem.

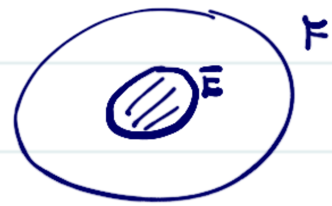
(2) Também notemos que como ν é σ-aditiva, se temos $E_j \in \mathcal{F}$ disjuntos dois a dois então $\nu\left(\sum_{j\geq 1} E_j\right) = \sum_{j} \nu(E_j)$

Note que $\nu\left(\sum_{j\geq 1} E_j\right)$ não depende da ordem da soma, mas $\sum_{j\geq 1} \nu(E_j)$ sim. Então temos de assumir que uma das séries

$$\sum_{j\,:\,\nu(E_j)\geq 0} \nu(E_j) \quad \text{ou} \quad -\sum_{j\,:\,\nu(E_j)\leq 0} \nu(E_j)$$

tem que ser convergente, ie não podem ser ambas $+\infty$.

Portanto quando fazemos a definição de ν σ-aditiva estamos implicitamente a assumir que isto não acontece.



Lema: Sejam $E, F \in \mathcal{F}$ e $E \subseteq F$.

Então:

(1) $|\nu(E)| < \infty \implies \nu(F \setminus E) = \nu(F) - \nu(E)$

(2) $\nu(E) = +\infty \implies \nu(F) = +\infty$

$(\nu(E) = -\infty \implies \nu(F) = -\infty)$

Prova: Vamos começar por (1)

Lembre que $F = E \cup (F \setminus E)$

Pela aditividade $\nu(F) = \nu(E) + \nu(F\setminus E)$ e como $|\nu(E)| < \infty$ então podemos subtrair de ambos os lados da igualdade $\nu(E)$ e obtemos

$$\nu(F) - \nu(E) = \nu(F \setminus E)$$

(2) Se $\nu(E) = +\infty$ como $\nu(F) = \nu(E) + \nu(F\setminus E)$

$= +\infty$

Pela observação que fizemos acima, já sabemos que não podemos ter $\nu(F|E) = -\infty$, logo há dois casos

1) $\nu(F|E) = \infty$ ou 2) $\nu(F|E) \in \mathbb{R}$

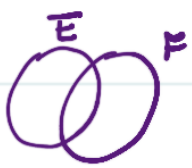
Mas em qualquer um dos casos concluímos que $\nu(F) = +\infty$.

A prova de (3) é exatamente análoga à prova de (2).

Lema: Seja $E \in \mathcal{F}$ tal que $\nu(E) = +\infty$. Seja $F \in \mathcal{F}$. Então $\nu(F)$ não pode ser igual a $-\infty$ ie

$$\nu(F) > -\infty.$$

Prova: Note que $\nu(E) = +\infty$. O conjunto $E \wedge F$ não pode ser tal que $\nu(E \cap F) = -\infty$, pois se fosse, então pelo resultado do lema anterior teríamos que como $E \cap F \subseteq E$ então



$\nu(E) = -\infty$ o que é falso. Logo $\nu(E \wedge F) \neq -\infty$.

Então $\nu(E \cap F) \in \mathbb{R}$ ou $\nu(E \cap F) = +\infty$.

Se $\nu(E \wedge F) \in \mathbb{R}$ então $\underbrace{\nu(E)}_{+\infty} = \underbrace{\nu(E \wedge F)}_{\in \mathbb{R}} + \nu(E|F)$

logo teríamos de ter $\nu(E|F) = +\infty$.

Mas como $F \cap E \setminus F = \phi$ então não podemos ter (pelas observações que fizemos acima) $\nu(F) = -\infty$, caso contrário teríamos dois conjuntos disjuntos tais que $\nu(F) = -\infty$ e $\nu(E \setminus F) = +\infty$.

Finalmente se $\nu(E \wedge F) = +\infty$, então pelo Lema anterior temos de ter $\nu(F) = +\infty$.

Pelo resultado que acabamos de provar sabemos que ν σ-aditiva só pode tomar valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ou $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, ie

se $F \in \mathcal{F}$, $\nu(F) \in (-\infty, +\infty]$ ou $\nu(F) \in [-\infty, +\infty)$

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\nu(F) \neq -\infty$!

Lembre que um dos primeiros resultados que vimos neste curso era que se $\mu: \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ era σ-aditiva então μ era contínua.

Vamos agora provar este resultado no caso em que $\nu: \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ie ν pode tomar valores reais negativos.

Lema: $\nu: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é contínua por cima e por baixo.

Prova: Seja $E_j \uparrow E$.

Vamos transformar a sequência numa sequência de conjuntos disjuntos ie $F_1 = E_1$; $F_2 = E_2 \setminus E_1, \ldots$ $F_k = E_k \setminus E_{k-1}$.

Por σ-aditividade, temos

$$\nu\Big(\bigcup_{j \geq 1} E_j\Big) = \nu\Big(\sum_{j \geq 1} F_j\Big) \overset{\sigma\text{-aditividade}}{=\!=} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(F_j)$$

porque $\bigcup_{j \geq 1} E_j = \sum_{j \geq 1} F_j$

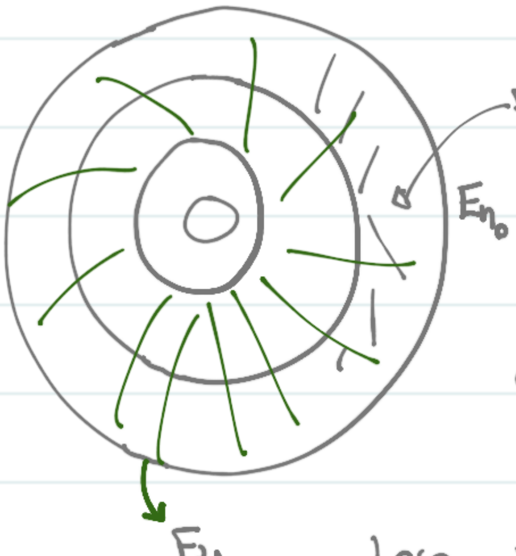
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu(F_j)$$

$$\overset{\text{aditividade}}{=\!=} \lim_{n \to +\infty} \nu\Big(\sum_{j=1}^{n} F_j\Big)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \nu(E_n) \quad ✓$$

Seja agora $E_j \downarrow$ e E_{n_0} tq $\nu(E_{n_0}) < \infty$.

Seja $F_1 = E_{n_0} \setminus E_{n_0+1}$; $F_2 = E_{n_0} \setminus E_{n_0+2}$; ... $F_k = E_{n_0} \setminus E_{n_0+k}$



observemos agora que:

- $\nu(E_{n_0+k}) \neq -\infty$ porque ν não toma o valor $-\infty$.
- $\nu(E_{n_0+k}) \neq +\infty$, porque se $\nu(E_{n_0+k}) = +\infty$ então teríamos $\nu(E_{n_0}) = +\infty$ o que é falso. $(E_{n_0} \supseteq E_{n_0+k})$.

Logo $\nu(E_{n_0+k}) \in \mathbb{R}$.

Note que $E_{n_0+k} \downarrow \bigcap_{j\geq 1} E_j$ e $F_k \uparrow E_{n_0} \setminus \bigcap_{j\geq 1} E_j$

Logo pelo que provamos acima, ν é contínua por baixo, logo

$$\lim_k \nu(F_k) = \nu\Big(E_{n_0} \setminus \bigcap_{j\geq 1} E_j\Big)$$

$$\nu(F_k) = \nu(E_{n_0} \setminus E_{n_0+k}) = \nu(E_{n_0}) - \nu(E_{n_0+k})$$

$$\nu\Big(E_{n_0} \setminus \bigcap_{j\geq 1} E_j\Big) = \nu(E_{n_0}) - \nu\Big(\bigcap_{j\geq 1} E_j\Big)$$

$$\therefore \lim_k \nu(E_{n_0}) - \nu(E_{n_0+k}) = \nu(E_{n_0}) - \nu\Big(\bigcap_{j\geq 1} E_j\Big)$$

Mas $\nu(E_{n_0}) < \infty$ logo podemos subtrair a ambos os lados da igualdade anterior e temos

$$\lim_k \nu(E_{n_0+k}) = \nu\Big(\bigcap_{j\geq 1} E_j\Big)$$

e isto é o mesmo que $\lim_j \nu(E_j) = \nu\Big(\bigcap_{j\geq 1} E_j\Big)$. ✓

O primeiro teorema que queremos provar diz o seguinte

Teorema de Hahn:

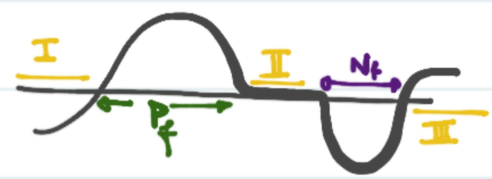
Seja $\nu: \mathcal{F} \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função σ-aditiva definida numa σ-álgebra $\mathcal{F}$. Então $\exists\, P \in \mathcal{F}$ tal que

$$\text{se } E \subseteq P \Rightarrow \nu(E) \geq 0$$

$$F \subseteq N = P^c \Rightarrow \nu(F) \leq 0.$$

Obs: Estes conjuntos P e N não são únicos.

Exemplo: Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a seguinte função



e definimos $\mu_f(E) = \int_E f \, d\lambda$.

Observe que se, por exemplo $E \subseteq P_f$ então $\mu_f(E) > 0$, mas se $E \subseteq N_f$ então $\mu_f(E) < 0$. Logo o conjunto P (resp. N) acima pode ser o conjunto P_f (resp. N_f) união com qualquer um dos conjuntos I, II ou III. Logo os conjuntos P e N não são únicos.

Prova: Seja $\lambda = \inf\limits_{A \in \mathcal{F}} \nu(A)$. Observa que $\nu(A) > -\infty$, mas não temos garantia de que $\lambda \neq -\infty$, teremos que o provar.

$\boxed{1}$ $\lambda \neq -\infty$. Vamos fazer a prova por redução ao absurdo.

Assuma que $\lambda = -\infty$. Vamos construir uma sequência de conjuntos A_k tais que $A_k \supseteq A_{k+1}$:

$$A_0 = \Omega$$

Vamos definir $\boxed{\lambda(E) = \inf\limits_{A \in \mathcal{F},\, A \subseteq E} \nu(A)}$. Ora $\lambda(A_0) = \lambda(\Omega) = \lambda = -\infty$.

Ora $\exists B_1$ t.q. $B_1 \subseteq A_0$ e $\nu(B_1) \leq -1$ (isto por definição de ínfimo)

Agora vamos definir A_1. Gostaríamos que $\lambda(A_1) = -\infty$.

Vamos ter duas escolhas possíveis para A_1:

$$A_1 = \begin{cases} B_1 & ; \text{ se } \lambda(B_1) = -\infty \\ A_0 \setminus B_1 & ; \text{ se } \lambda(B_1) > -\infty \ (*) \end{cases}$$

(*) observe que neste caso temos $\lambda(A_0 \setminus B_1) = -\infty$. Suponha que não ie $\lambda(A_0 \setminus B_1) > -\infty$. Mas note que isto contradiz o facto de $\lambda(\underset{\Omega}{\overset{\shortparallel}{A_0}}) = -\infty$, já que se $E \subseteq A_0$ então

$$\nu(E) = \nu(\underbrace{E \cap B_1}_{\subseteq B_1}) + \nu(E \cap (A_0 \setminus B_1))$$

$$\overset{\text{def de ínfimo}}{\geq} \lambda(B_1) + \lambda(A_0 \setminus B_1)$$

$$\therefore \forall E \subseteq A_0 \quad \nu(E) \geq \lambda(B_1) + \lambda(A_0 \setminus B_1)$$

logo também vale para o ínfimo e temos:

$$\lambda(A_0) \geq \lambda(B_1) + \lambda(A_0 \setminus B_1)$$

e como $\lambda(A_0) = -\infty$ então $\lambda(B_1) = -\infty$ ou $\lambda(A_0 \setminus B_1) = -\infty$.

Mas como $\lambda(B_1) > -\infty$ então $\lambda(A_0 \setminus B_1) = -\infty$.

observe que em ambos os casos acima ie

$$A_1 = \begin{cases} B_1 & \text{se } \lambda(B_1) = -\infty \\ A_0 \setminus B_1 & \text{se } \lambda(B_1) > -\infty \Rightarrow \lambda(A_0 \setminus B_1) = -\infty \end{cases}$$

se tem que $\lambda(A_1) = -\infty$ como pretendíamos.

Quando escolhemos A_1 como sendo $A_0 \setminus B_1$ vamos dizer que acontece uma bifurcação.

Este foi o 1º passo da construção: partimos de $A_0 = \Omega$ e construímos A_1 e B_1 tq $A_1 \subseteq A_0$ e $\lambda(A_1) = -\infty$.

$B_1 \subseteq A_0$

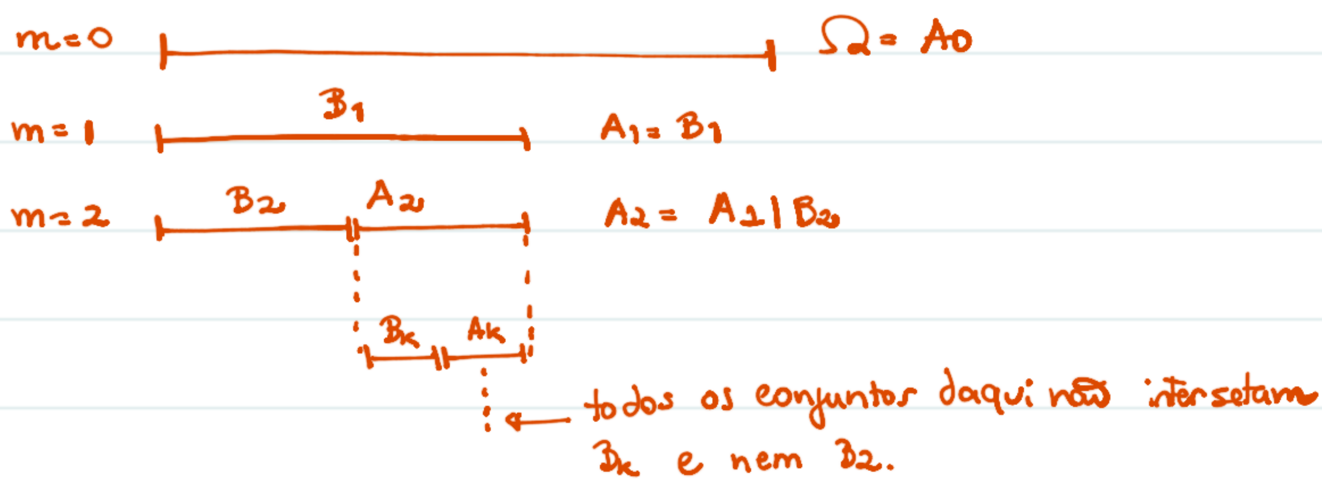
Agora podemos iterar este argumento. Vamos construir B_2, ie $B_2 \subseteq A_1$ tq $\nu(B_2) \leq -2$. Como anteriormente definimos

$$A_2 = \begin{cases} B_2 & \text{se } \lambda(B_2) = -\infty \\ A_1 \setminus B_2 & \text{se } \lambda(B_2) > -\infty \Rightarrow \lambda(A_1 \setminus B_2) = -\infty \end{cases}$$

Em qualquer um dos casos temos $\lambda(A_2) = -\infty$.

Observa que a sequência A_k é decrescente ie $A_k \supseteq A_{k+1}$ e além disso $A_k \supseteq B_{k+1}$, $\lambda(A_k) = -\infty$ e $\nu(B_k) \leq -k$.

Observe que sempre que houver uma bifurcação, os conjuntos A_k e B_k que se seguem serão disjuntos do conjunto B_m onde m é o passo da iteração onde ocorreu a bifurcação.



Formalizemos o argumento. Ora suponha que ocorre uma bifurcação no $(k+1)$-ésimo passo da iteração. Então $A_{k+1} = A_k \setminus B_{k+1}$. Se $j \geq k+1$ então $A_j \subseteq A_{k+1}$ e $B_{j+1} \subseteq A_j \subseteq A_{k+1}$. Logo $A_{k+1} \cap B_{k+1} = \emptyset$ e $B_{j+1} \cap B_{k+1} = \emptyset$.

Ora $j+2 \geq k+2$, logo $\forall i \geq j+2$, $B_i \cap B_{k+1} = \phi$. (ver a figura acima).

Agora temos que analisar duas situações:

{1} Há um nº finito de bifurcações:

Então $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ não há bifurcações. E neste caso, como já vimos acima temos que $B_n = A_n$. Os conjuntos A_n decrescem, logo para $n \geq n_0$ temos $B_n \subseteq B_{n-1}$ ie B_n também é uma sequência decrescente. Também sabemos, por construção que $\nu(B_n) > -\infty$. Seja B tal que $B_n \downarrow B$. Agora podemos aplicar a continuidade por cima de ν já que $\nu(B_n) > -\infty$ (na verdade isto vale para todo n). Então $\nu(B) = \lim_n \nu(B_n) \underset{\downarrow \nu(B_n) \leq -n}{\leq} \lim_n -n = -\infty$

Mas agora note que B é um conjunto tal que $\nu(B) = -\infty$ o que é impossível.

$\therefore$ o caso {1} não é possível!

{2} Existe um nº infinito de bifurcações:

Sejam $n_0, n_1, n_2, \ldots$ os passos em que ocorrem bifurcações.

Pelo argumento de {1} sabemos que $B_{n_j} \cap B_{n_k} = \phi$, $j \neq k$.

Logo se $B = \sum_j B_{n_j}$ então $\nu(B) = \sum_{j \geq 1} \nu(B_{n_j}) \leq \sum_{j \geq 1} -n_j = -\infty$.

E de novo encontramos um conjunto B tal que $\nu(B) = -\infty$ o que não é possível.

Com este argumento provamos que $\lambda \neq -\infty$, pois acima obtemos uma contradição nos dois únicos casos possíveis.

$$\therefore \ \lambda = \inf_{A \in \mathcal{F}} \nu(A) > -\infty$$

✓

$\boxed{2}$ Agora queremos provar que existe um conjunto N tal que $\nu(N) = \lambda$.

Ora, por definição de ínfimo, $\exists A_n$ tq

$$\lambda \leq \nu(A_n) < \lambda + \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Ora } \ \nu(A_n \cup A_{n+1}) \overset{\text{aditividade de } \nu}{=} \nu(A_n) + \nu(A_{n+1}) - \underbrace{\nu(A_n \cap A_{n+1})}_{\geq \lambda}$$

$$< \lambda + \frac{1}{2^n} + \lambda + \frac{1}{2^{n+1}} - \lambda$$

$$\leq \lambda + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Note que $\nu(A_n \cap A_{n+1}) \geq \lambda$ pois λ é o ínfimo.

Repetindo este argumento temos que, para $m > n$

$$\nu(A_n \cup A_{n+1} \cup \dots \cup A_m) \leq \lambda + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m}$$

Observe agora que $A_n \cup \dots \cup A_m \uparrow \bigcup_{j \geq n} A_j$ e pela continuidade por baixo de ν temos

$$\nu\Big(\bigcup_{j \geq n} A_j\Big) = \lim_{m \to +\infty} \nu(A_n \cup \dots \cup A_m)$$

$$\leq \lambda + \underbrace{\sum_{j \geq n} \frac{1}{2^j}}_{} \qquad \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \ \nu\Big(\bigcup_{j\geq n} A_j\Big) \leq \lambda + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Agora observe que para o conjúnto acima $N_n = \bigcup_{j\geq n} A_j$ temos $N_n \supseteq N_{n+1}$

Seja então $N_n = \bigcap_{n\geq 1} N_n$

Então, pela continuidade por cima temos

$$\nu(N) = \lim_{n} \nu(N_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \lambda + \frac{1}{2^{n-1}} = \lambda$$

Por outro lado, como λ e' definido como o ínfimo, temos que $\nu(N) \geq \lambda$.

Daqui resulta que $\nu(N) = \lambda$.

✓

$\boxed{3}$ Seja agora $P = N^c$. • Note que se $E \subseteq P$ então $\nu(E) \geq 0$, porque se $\nu(E) < 0$ então

$$\nu(N \cup E) \leq \nu(N) + \nu(E) < \nu(N) = \lambda$$

Mas isto e' absurdo pois λ e' definido como o ínfimo.

• Note que se $F \subseteq N$ então $\nu(F) \leq 0$, porque se $\nu(F) > 0$ então $\nu(N \setminus F) = \nu(N) - \nu(F) < \lambda$ o que, novamente, e' impossível.

✓

Agora note que $\Omega = P + N$ (pois $P \cap N = \emptyset$)

1) se $E \subseteq P \Rightarrow \nu(E) \geq 0$

2) se $F \subseteq N \Rightarrow \nu(F) \leq 0$

e agora podemos definir as seguintes funções:

$\nu_+(E) = \nu(E \cap P)$ e como $E \cap P \subseteq P$

$\nu(E \cap P) \geq 0$

$\therefore \nu^+(E) \geq 0$

$\nu_-(F) = -\nu(F \cap N)$ e como $F \cap N \subseteq N$

$\nu(F \cap N) \leq 0$

$\therefore -\nu(F \cap N) \geq 0$

$\therefore \nu_-(F) \geq 0$

e agora podemos sempre escrever

$$\boxed{\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)}$$

Esta é a chamada decomposição de Jordan.

(*) note que podemos sempre escrever (P e N formam uma partição de Ω)

$$A = A \cap \Omega = A \cap (P + N) = (A \cap P) + (A \cap N)$$

$$\therefore \nu(A) \underset{\text{aditividade}}{=} \underbrace{\nu(A \cap P) + \nu(A \cap N)} = \nu_+(A) - \nu_-(A)$$

Observe que acima já vimos que a decomposição de Hahn não é única. A decomposição de Jordan vai ser única se assumirmos que os suportes das medidas não se intersectam.

Podemos resumir o que provamos acima no seguinte teorema.

TEOREMA DE HAHN-JORDAN: Dada $\nu: \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ν σ-aditiva e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra, existem medidas $\nu_{\pm} : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e subconjuntos P e N e $\mathcal{F}$ tais que $\Omega = P + N$ ($P \cap N = \phi$) tal que $\forall E \in \mathcal{F}$ se tem

$$\nu_+(E) = \underbrace{\nu(E \cap P)}_{\geq 0} \quad ; \quad \nu_-(E) = \underbrace{-\nu(E \cap N)}_{\geq 0}$$

e $\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E)$ ie ν é a diferença de duas medidas. Pelo menos uma delas ν_+ ou ν_- é finita e se ν é finita (ou σ-finita) ambas são.

Exercício: Considere Ω um espaço com um nº infinito de pontos. $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega)$ Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência de pontos distintos de Ω. Seja $p_1, p_2, \ldots$ uma sequência de nºs reais tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |p_i| < \infty. \qquad p_i = \mu(\{x_i\})$$

Seja $\mu(E) = \sum_{x_i \in E} p_i$. μ diz-se discreta

Note que $\mu_E = \mu_+(E) - \mu_-(E)$ onde

$$\mu_+(E) = \sum_{x_i \in E} \max\{0, p_i\} \qquad |p_i| = \begin{cases} p_i & \text{se } p_i \geq 0 \\ -p_i & \text{se } p_i < 0. \end{cases}$$

$$\mu_-(E) = -\sum_{x_i \in E} \min\{0, p_i\}$$

μ_+ e μ_- são medidas:

1) $$\mu_+(E) = \sum_{x_i \in E} \max\{0, p_i\} \leq \sum_{x_i \in E} |p_i| \leq \sum_i |p_i| < \infty$$

2) $$\mu_-(E) = -\sum_{x_i \in E} \underbrace{\min\{0, p_i\}} = -\sum_{\substack{x_i \\ p_i \geq 0}} 0 - \sum_{\substack{x_i \in E \\ p_i < 0}} p_i$$

$$= -\sum_{\substack{x_i \in E \\ p_i < 0}} p_i \leq \sum_i |p_i| < \infty.$$

Seja $P = \{ x : \mu(\{x\}) > 0 \}$ e $N = \Omega \setminus P$.

$\therefore\ \mu_+(E) = \mu(P \cap E)$ e $\mu_-(E) = -\mu(E \cap N)$ $\forall E \in \mathcal{C}$.

obs $$\mu_+(E) = \sum_{x_i \in E} \max\{0, p_i\} = \sum_{\substack{x_i \in E \\ p_i \geq 0}} p_i$$

$$= \sum_{\substack{x_i \in E \\ x_i \in P}} p_i = \mu(P \cap E)$$

Com este teorema justificamos a nossa escolha de simplificar a apresentação dos resultados do curso restringindo-nos a funções que tomam valores não negativos. Agora vamos voltar ao cap 6.4 do Taylor.

Vamos discutir o Teorema de Radon-Nikodym.

Temos sempre um espaço de medida

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ μ é σ-finita e $\mu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ μ é uma medida.

Temos também $\nu: \mathcal{F} \to (-\infty, +\infty]$ e ν é σ-finita

Lembre que $\nu \ll \mu$ sempre que $\mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0$.

(ν é absolutamente contínua com respeito a μ)

Também já vimos como exemplo, dada f uma função integrável, definimos

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Agora f não tem que ser positiva (como assumimos antes)

Agora vamos introduzir um outro conceito que vai ser muito importante. Assuma que $\nu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ e que $\mu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

Definição: ν diz-se singular com respeito a μ (e denotamos por $\nu \perp \mu$) se $\exists\, A \in \mathcal{F}$ e $\mu(A) = 0$ e $\nu(A^c) = 0$.

(*) observe que como $\nu(A^c) = 0$ e ν é uma medida então $\forall B \subseteq A^c$ se tem $\nu(B) = 0$. Obs: a def no caso geral (de med c/ sinal.) é que $\mu \perp \nu$ se $\exists E_0 \in \mathcal{F}$ tq $\mu(E_0) = 0$ e $\nu(E) = \nu(E \cap E_0)$ $\forall E \in \mathcal{F}$.

Exemplos ①

$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$

$\mu_g(E) = \int_E g \, d\mu$

então $\mu_f(A^c)=0$ e $\mu_g(A)=0$.

(2) $\lambda =$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

Seja $\{q_j : j \geq 1\}$ uma numeração de $\mathbb{Q}$ e sejam $c_j \in \mathbb{R}_+$ tq $\sum_{j\geq 1} c_j < \infty$.

Considere $\nu = \sum_{j\geq 1} c_j \delta_{q_j}$

λ e ν são medidas singulares pois se:
$A = \mathbb{Q}$ então $\nu(A^c) = 0$ e $\lambda(A) = 0$.

Também podíamos ter considerado $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e a medida μ_f. Então μ_f e ν são singulares, porque

$$\nu(\mathbb{Q}^c) = 0 \quad \text{e} \quad \mu_f(\mathbb{Q}) = 0.$$
$$\mu_f(\mathbb{Q}) = \int_{\mathbb{Q}} f \, d\lambda$$

Ex: Mostre que se $\mu, \nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medidas, μ finita, $\mu << \nu$ então $\forall \varepsilon \exists \delta$ tq $\nu(E) < \delta \Rightarrow \mu(E) < \varepsilon$.

Agora vamos enunciar e provar o teorema de Radon-Nikodym.

Teorema (Radon-Nikodym)

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ e $\nu : \mathcal{F} \to (-\infty, +\infty]$ σ-aditiva e σ-finita. Então existem ν_1 e ν_2 tais que

1) $\nu = \nu_1 + \nu_2$ e $\nu_1 << \mu$ e $\nu_2 \perp \mu$, ν_1 e ν_2 são σ-finitas

2) Esta decomposição é única.

3) $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $\nu_1(A) = \int_A f \, d\mu$. $(f : \Omega \to \mathbb{R})$

obs: (A) acima ñ exigimos que f seja μ-integravel. Então a igualdade em 3) diz que se o lado direito ie $\int_A f d\mu$ está bem definido então $\nu_1(A)$ também e vale a igualdade e vice-versa.

(B) A função f é única μ-q.c. ie se $\nu_1(A) = \int_A g d\mu$ então $f = g$ μ-q.c.

(C) A função f é chamada "derivada de Radon-Nikodym" e representa-se por $f = \frac{d\nu_1}{d\mu}$

⊛ Lembre que já vimos que se $\mu(A) = \int_A f d\nu$ então $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q. $\nu(E) < \delta \Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$

Prova:

① Vamos primeiro assumir que ν toma valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$ e que ν e μ são finitas! Depois faremos o caso geral.

Vamos querer definir $\nu_1(A) = \int_A f d\mu$ e lembre que queremos $\nu = \nu_1 + \nu_2$ e portanto $\nu_1(A) \leq \nu(A)$. Logo se existe tal f vamos ter que

$$\nu(A) \geq \nu_1(A) = \int_A f d\mu_1$$ e esta desigualdade terá de ser verdade $\forall A \in \mathcal{F}$.

↳ se f fosse positiva então $\int_A f d\mu$ é uma medida que é abs. cont com respeito a μ_1.

Definimos então $\mathcal{H} = \left\{ \begin{matrix} f \geq 0 \\ f \in \mathcal{F} \end{matrix} : \int_A f d\mu \leq \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{F} \right\}$

Vamos tentar obter uma função em $\mathcal{H}$ que maximiza esta desigualdade. O conjunto $\mathcal{H}$ contém todas as funções candidatas à derivada de R-N.

Para tal vamos definir $\alpha = \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_\Omega f \, d\mu$.

obs: $\alpha < \infty$ pois $f \in \mathcal{H}$ logo
$\int_\Omega f \, d\mu \leqslant \nu(\Omega) < \infty$ porque estamos a assumir que ν é finita.

Assim o que vamos fazer é encontrar funções que aproximem o supremo, ie, vamos mostrar que $\exists\, g \in \mathcal{H}$ tal que
$\int_\Omega g \, d\mu = \alpha$ e vamos definir

$$\nu_1(A) = \int_A g \, d\mu$$

Depois vamos definir $\nu_2(A) = \nu(A) - \nu_1(A) \geqslant 0$ (*). Esta última desigualdade é verdade pois se $g \in \mathcal{H}$, $\underbrace{\int_A g \, d\mu}_{\nu_1(A)} \leq \nu(A)$

$\therefore \nu(A) - \nu_1(A) \geqslant 0$.

E depois de termos ν_2 definida da forma (*), vamos ter de provar que $\nu_2 \perp \mu$.

Vamos então provar estas afirmações de forma rigorosa.

$\boxed{1}$ Lembre que vamos assumir primeiro que $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ e

μ e ν são finitas.

Definimos

$$\mathcal{H} = \{ f \in \mathcal{F}, \; f \geq 0 \quad \int_A f \, d\mu \leq \nu(A) \; \forall A \in \mathcal{F} \}$$

obs: o conjunto $\mathcal{H} \neq \phi$ pois se $f \equiv 0$ então $\int_A f \, d\mu = 0 \leq \nu(A) \forall A \in \mathcal{F}$.
Logo a função constante $f \equiv 0 \in \mathcal{H}$.

Seja $\alpha = \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_\Omega f \, d\mu$.

1) $\alpha \geq 0$ pois se $f = 0$ $\int_\Omega f \, d\mu = 0$.

2) $\alpha < \infty$ (já vimos) pois $\int_\Omega f d\mu \leq \nu(\Omega) < \infty$.

Agora queremos encontrar uma função g tal que $g \in \mathcal{H}$ e $\int g \, d\mu = \alpha$
Como $\alpha < \infty$, podemos sempre encontrar uma sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$
tq (I) $\boxed{\alpha - \frac{1}{n} \leq \int f_n \, d\mu \leq \alpha}$ (aqui estamos a usar a def de supremo)

O nosso objectivo consiste em usar esta sequência para encontrar a tal função maximal g. Vamos considerar uma sequência monótona à custa da sequência f_n ie definimos:

$$g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$$

Note que

$$\boxed{g_n \uparrow \quad \text{e} \quad g_n \in \mathcal{H}.}$$

Para provarmos que $g_n \in \mathcal{H}$ temos de analisar $\int_A g_n \, d\mu$.

Sejam agora, para cada n, os conjuntos $E_{n,k}$ definidos por:

$$E_{n,k} = \{ x \in \Omega : g_n(x) = f_k(x) \}$$

Observe que os conjuntos $E_{n,k}$ formam uma partição de Ω (podemos definir indutivamente os conjuntos $E_{n,k}$ da seguinte forma, $E_{n,1}$ os pontos onde g_n coincide com f_1 e mesmo que coincida com f_i podemos incluí-los neste conjunto, do que resta definimos $E_{n,2}$ como o conjunto dos pontos onde $g_n = f_2$ e por aí em diante)

há mais formas de escolher esta partição, mas basta-nos ter uma

Agora fazemos o truque usual; escrevemos

$$\int_A g_n \, d\mu = \int \mathbb{1}_A g_n \, d\mu = \int \mathbb{1}_{\{\sum_{k=1}^{n} E_{n,k} \cap A\}} g_n \, d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int \mathbb{1}_{\{E_{n,k} \cap A\}} g_n \, d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int \mathbb{1}_{E_{n,k} \cap A} f_k \, d\mu$$

$f_k \in \mathcal{H}$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_{n,k})$$

$$= \nu(A)$$ porque os $E_{n,k}$ formam uma partição de Ω.

Iste argumento para que $g_n \in \mathcal{H}$. A vantagem de trabalhar com g_n em vez de f_n é que $g_n \uparrow$ pois $g_{n+1} = \max\{f_1, \dots, f_{n+1}\} \geq \max\{f_1, \dots, f_n\} = g_n$

e portanto g_n tem limite. Seja $g = \lim_n g_n$.

Afirmação: $g \in \mathcal{H}$.

1. $g \geq 0$ pois g é limite pontual de funções $g_n \geq 0$
2. $g \in \mathcal{F}$ pois g é limite pontual de funções $g_n \in \mathcal{F}$.
3. Seja $A \in \mathcal{F}$. Ora $\int_A g_n \, d\mu \leq \nu(A)$ pois $g_n \in \mathcal{H}$.

Agora, pelo TCM, $g_n \in \mathcal{F}$, $g_n \geq 0$, $g_n \uparrow g$ então

$$\lim_n \int_A g_n \, d\mu \leq \nu(A)$$

$$\downarrow$$

$$\int_A g \, d\mu$$

$$\therefore \int_A g \, d\mu \leq \nu(A) \qquad \therefore g \in \mathcal{H}.$$

✓

<u>Afirmação</u>: $\int g \, d\mu = \alpha$.

Ora $\int g \, d\mu \leq \alpha$, pois $g_n \in \mathcal{H}$ logo $\int g_n \, d\mu \leq \alpha$ $\forall n$.

Por outro lado como $g_n \uparrow g$ então

$$\int g_n \, d\mu \leq \int g \, d\mu \quad \forall n$$

Mas $\int g_n \, d\mu \geq \int f_n \, d\mu$ pois g_n é definido como o max

Logo $\int f_n \, d\mu \leq \int g_n \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Mas $\int f_n \, d\mu \geq \alpha - 1/n, \; \forall n$

ver (I)

$$\therefore \int g \, d\mu \geq \alpha - 1/n \quad \forall n$$

$$\therefore \int g \, d\mu \geq \alpha$$

Daqui resulta que $\int g \, d\mu = \alpha$.

✓

Assim encontramos a função $g \in \mathcal{H}$ que atinge o supremo ie tq $\int g \, d\mu = \alpha = \sup_{f \in \mathcal{H}} \int f \, d\mu$.

Agora vamos definir $\nu_1(A) = \int_A g \, d\mu$ e como $g \in \mathcal{H}$

$$\nu_1(A) = \int_A g \, d\mu \leq \nu(A).$$

E também definimos $\nu_2(A) = \nu(A) - \nu_1(A)$.

Observe que pela definição de ν_1, é óbvio que $\nu_1 \ll \mu$. Para terminar a primeira parte da nossa demonstração falta então mostrar que $\nu_2 \perp \mu$.

Consideremos agora $\lambda_n = \nu_2 - \frac{1}{n}\mu$. Observa que λ_n é uma medida com sinal pois pode tomar valores negativos. Então já vimos na decomposição de Hahn-Jordan, que existem conjuntos P_n e $N_n \in \mathcal{F}$ tq $\lambda_n(E) \geq 0$ se $E \subseteq P_n$ e $\lambda_n(F) \leq 0$ se $F \subseteq N_n = P_n^c$.

Vamos querer agora provar que $\mu(P_n) = 0$.

Afirmação: $\mu(P_n) = 0 \quad \forall n.$

Consideremos agora a função $\boxed{g + \frac{\mathbb{1}_{P_n}}{n}}$

1) $g + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{P_n} \in \mathcal{H}$?

Ora para tal basta ver que

a positividade e mensurabilidade saem trivialmente

$$\int_E \left(g + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{P_n}\right) d\mu \leq \nu(E)$$

Ora $\int_E \left(g + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{P_n}\right) d\mu = \underbrace{\int_E g \, d\mu}_{\nu_1(E)} + \frac{1}{n}\mu(P_n \cap E)$ ✡

Por outro lado $P_n \cap E \subseteq P_n$, logo $\lambda_n(P_n \cap E) \geq 0$

Mas $\lambda_n(P_n \cap E) = \nu_2(P_n \cap E) - \frac{1}{n}\mu(P_n \cap E) \geq 0$

$$\therefore \nu_2(P_n \cap E) \geq \frac{1}{n}\mu(P_n \cap E)$$

Voltando a ✡ temos

$$\nu_1(E) + \frac{1}{n}\mu(P_n \cap E) \leq \nu_1(E) + \nu_2(P_n \cap E)$$

$$\leq \nu_1(E) + \nu_2(E) = \nu(E)$$

Daqui resulta que $g + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{P_n} \in \mathcal{H}_0$. ✓

Agora podemos analisar

$$\int \left(g + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{P_n}\right) d\mu = \alpha + \frac{1}{n}\mu(P_n)$$

Se $\mu(P_n) > 0$ então $\alpha + \frac{1}{n}\mu(P_n) > \alpha$ o que é absurdo pois α é o supremo dos integrais. Isto mostra que $\mu(P_n) = 0$ ✓

Acabamos agora de ver que $\mu(P_n) = 0 \ \forall n$.

Seja $P = \bigcup_{n \geq 1} P_n$. Então $\mu(P) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(P_n) = 0$.

$$\therefore \mu(P) = 0$$

Seja agora $N = P^c = \left(\bigcup_{n \geq 1} P_n\right)^c = \bigcap_{n \geq 1} P_n^c = \bigcap_{n \geq 1} N_n$.

Falta agora provarmos que $\nu_2(N) = 0$.

Ora $\nu_2(N) = \nu_2\left(\bigcap_{n\geq 1} N_n\right) \leq \nu_2(N_n)$

pois $\bigcap_{n\geq 1} N_n \subseteq N_n \ \forall n$.

Lembre que $\underbrace{\lambda_n(N_n)}_{\nu_2(N_n) - \frac{1}{n}\mu(N_n)} \leq 0$.

$$\therefore \nu_2(N_n) \leq \frac{1}{n}\mu(N_n) \leq \frac{1}{n}\underbrace{\mu(\Omega)}_{<\infty} \quad \forall n$$

$$\therefore \nu_2(N) = 0.$$

Isto prova que as medidas μ e ν_2 são singulares pois encontramos P e N tais que $P, N \in \mathcal{F}$ e

$$\mu(P) = 0 \ , \ \nu_2(N) = 0.$$

Até agora fizemos a demonstração da decomposição assumindo que $\nu: \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ e μ, ν eram medidas finitas. Agora vamos passar para medidas σ-finitas ie

$$\Omega \underset{(1)}{=} \bigcup_{n\geq 1} E_n \quad e \quad \mu(E_n) < \infty, \ \forall n.$$

(podemos assumir $E_n \uparrow$)

e também temos $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ e $\nu(F_n) < \infty$, $\forall n$.

Seja $G_n = E_n \cap F_n$. Então $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} G_n$. Vejamos a igualdade.

Ora $G_n \subseteq \Omega$ e portanto $\bigcup_{n \geq 1} G_n \subseteq \Omega$. Seja agora $w \in \Omega$. Por (1) $\exists n_0$ tq $x \in E_{n_0}$. Mas como $E_n \uparrow$ então $x \in E_n \; \forall n \geq n_0$. Analogamente $\exists \; n_1$ tq $x \in F_{n_1}$, mas como $F_n \uparrow$ então $x \in F_n \; \forall n \geq n_1$. Sendo assim $x \in E_i \cap F_i \;\; \forall i \geq n_0 \vee n_1$, ie $x \in \bigcup_{n \geq 1} G_n$.

Ora $\mu(G_n) < \infty$ porque $G_n \subseteq E_n$ e $\mu(E_n) < \infty$

$\nu(G_n) < \infty$ porque $G_n \subseteq F_n$ e $\nu(F_n) < \infty$

Então $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} G_n$ com $G_n \uparrow$; $\mu(G_n) < \infty$ e $\nu(G_n) < \infty$.

Seja agora

$$H_1 = G_1$$

$$H_2 = G_2 \setminus G_1$$

$$H_k = G_k \setminus G_{k-1}$$

Como $G_n \uparrow$ os conjuntos H_j são disjuntos, ie $H_i \cap H_j = \phi$ se $i \neq j$.

$\Omega = \bigcup_{j \geq 1} H_j$ e $\mu(H_j) < \infty$

$\nu(H_j) < \infty$.

Vamos definir

$$\mu_j(A) = \mu(A \cap H_j)$$

$$\nu_j(A) = \nu(A \cap H_j)$$

Este é sempre o argumento que usamos quando queremos passar de medidas finitas para medidas σ-finitas, observe que μ_j e ν_j agora são finitas e são a restrição de μ e ν (resp). ao conjunto H_j. Logo podemos aplicar a primeira parte da para a cada uma destas medidas.

Logo $\nu_j = \nu_j^1 + \nu_j^2$ tq $\nu_j^1 \ll \mu_j$ e $\nu_j^2 \perp \mu_j$.

Então

$$\nu_j^1(E\cap H_j) = \int_{E\cap H_j} f_j \, d\mu_j \underset{\mu_j = \mu \text{ em } H_j}{=} \int_{E\cap H_j} f_j \, d\mu$$

Seja $f = \sum_{j\geq 1} f_j \mathbb{1}_{H_j}$

então $\nu^1(E) = \sum_{j\geq 1} \nu_j^1(E\cap H_j) = \sum_{j\geq 1} \int_{E\cap H_j} f_j \, d\mu$

$$= \int_E \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{H_j} f_j \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

$$\therefore \nu^1(E) = \int_E f \, d\mu$$

Analogamente ν_j^2 e μ_j são ortogonais ie $\exists P_j \subseteq H_j$ tq $\mu_j(P_j) = 0$ e $\nu_j^2(H_j \setminus P_j) = 0$.

Logo $P = \sum_j P_j$ e $\mu(P) = \sum_{j\geq 1} \mu(P\cap H_j) = \sum_{j\geq 1} \underbrace{\mu_j(P_j)}_{=0} = 0$

e $\nu^2(P^c) = 0$ pelo mesmo argumento.

Com isto terminámos a prova no caso geral, ie quando as medidas são σ-finitas, ie $\nu : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e μ e ν são σ-finitas. Vamos agora supôr que $\nu : \mathcal{F} \longrightarrow (-\infty, +\infty]$.

Pela Decomposição de Hahn - Jordan aplicada a ν temos:

$$\nu = \theta_1 - \theta_2$$

onde $\theta_j : \mathfrak{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e θ_j são medidas, $j \in \{1,2\}$. → são medidas positivas e σ-finitas

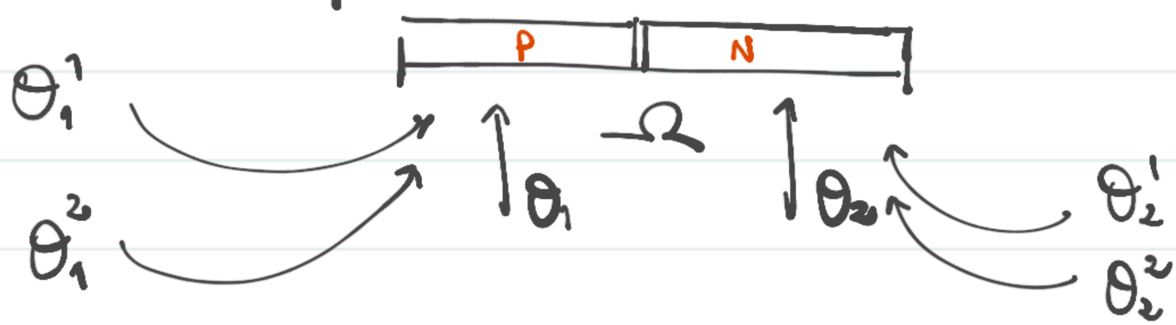
Vamos aplicar os resultados que vimos acima a θ_1 e θ_2.

Logo $\theta_1 = \theta_1^1 + \theta_1^2$ onde $\theta_1^1 \ll \mu$ e $\theta_1^2 \perp \mu$

$\theta_2 = \theta_2^1 + \theta_2^2$ onde $\theta_2^2 \ll \mu$ e $\theta_2^2 \perp \mu$

Lembre que escrevemos Ω como $P \cup N$ e θ_1 tem suporte em P e θ_2 em N!

Analogamente θ_1^1 e θ_1^2 têm suporte contido em P e θ_2^1 e θ_2^2 têm suporte contido em N, isto é, qualquer conjunto contido em N tem medida nula para θ_1^1 e θ_1^2 e qualquer conjunto contido em P tem medida nula para θ_2^1 e θ_2^2.



Para θ_1^1 temos uma função f_1^1 e θ_2^1 temos uma função f_2^1 que nos permitem escrever

A função f_1^1 toma o valor 0 em N e f_2^2 toma o valor 0 em P, q.c. com resp. a μ.

$$\theta_i^1(A) = \int_A f_i^1 \, d\mu$$

Ora se $f^1 = f_1^1 - f_2^1$ então

$$\theta_1^1(A) = \int_A f_1^1 \, d\mu \qquad ; \qquad \theta_2^1(A) = \int_A f_2^1 \, d\mu$$

$$\therefore \quad \underbrace{\theta_1^1(A) - \theta_2^1(A)}_{\nu(A)} = \int_A f_1^1 \, d\mu - \int_A f_2^1 \, d\mu = \int_A f_1^1 - f_2^1 \, d\mu$$

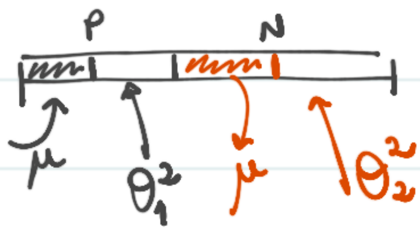
$$= \int_A f^1 \, d\mu$$

Logo f^1 é a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Para ver a igualdade acima basta separar A em $(A \cap P) \cup (A \cap N)$ e em P consideramos a parte positiva e em N a parte negativa.

Isto dá-nos a parte absolutamente contínua de ν.

Analogamente temos



Ou seja no conjunto P temos dois conjuntos um para o suporte de μ e outro para o de θ_1^2. O mesmo vale em N.

Da mesma forma que acima podemos obter a medida

$\theta_1^2 - \theta_2^2$ que é singular com respeito a μ.

Agora vamos provar a unicidade da decomposição.

Suponhamos que $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \overline{\nu_1} + \overline{\nu_2}$ onde

$\nu_1 \ll \mu$, $\bar{\nu}_1 \ll \mu$, $\nu_2 \perp \mu$, $\bar{\nu}_2 \perp \mu$.

Queremos provar que $\nu_1 = \bar{\nu}_1$

Ora a identidade acima pode ser escrita como

$$\nu_1 - \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 - \nu_2$$

Então $\exists A$ tq $\mu(A) = 0$ e $\nu_2(A^c \cap F) = 0$ $\forall F \in \mathcal{F}$. (isto vale porque $\nu_2 \perp \mu_1$.

Analogamente $\exists B$ tq $\mu(B) = 0$ e $\bar{\nu}_2(B^c \cap G) = 0$ $\forall G \in \mathcal{F}$.

Consideremos o conjunto $C = A \cup B$.

- Ora $\mu(C) = 0$ pois $\mu(C) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$.
- Seja $E \in \mathcal{F}$. Escreveremos agora

$$E = (E \cap (A \cup B)) \cup (E \cap (A \cup B)^c)$$

Note que

(*) $\mu(E \cap (A \cup B)) \leq \mu(A \cup B) = \mu(C) = 0$, e

como $\nu_1, \bar{\nu}_1 \ll \mu$ então

$$\nu_1(E \cap (A \cup B)) = \bar{\nu}_1(E \cap (A \cup B)) = 0.$$

(**) $$\nu_2(E \cap (A \cup B)^c) = \nu_2(\underbrace{E \cap A^c \cap B^c}_{\subseteq A^c}) = 0$$

$$\bar{\nu}_2(E \cap (A \cup B)^c) = \bar{\nu}_2(\underbrace{E \cap A^c \cap B^c}_{\subseteq B^c}) = 0$$

Ora, daqui segue que $(\nu_1 - \bar{\nu}_1)(E) = (\nu_1 - \bar{\nu}_1)\big((E \cap (A \cup B)) \cup (E \cap (A \cup B)^c)\big)$

$$= \underbrace{(\nu_1 - \bar{\nu}_1)(E \cap (A \cup B))}_{0 =} + \underbrace{(\nu_1 - \bar{\nu}_1)(E \cap (A\cup B)^c)}_{\substack{\| \\ \underbrace{(\bar{\nu}_2 - \nu_2)(E \cap (A\cup B)^c)}_{=0}}}$$

$\therefore (\nu_1 - \bar{\nu}_1)(E) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{F}$

$$\therefore \nu_1 = \bar{\nu}_1$$

e da igualdade $\nu_1 - \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 - \nu_2$ resulta que $\nu_2 = \bar{\nu}_2$.

Agora vamos analisar o ponto 3) ie $f \in \mathcal{F}$ e $\nu_1(A) = \int_A f \, d\mu$.
Já provamos a existência desta função. Mas agora note que se $f = g$ q.c. então $\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$ se os integrais estão bem definidos.

já provámos esta identidade antes.

Então a função f não é única, pois qualquer outra função que coincida com f quase certamente, o valor dos integrais coincidem.

Exemplo: Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel, φ integrável com respeito a λ a medida de Lebesgue.
Seja $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi \, d\lambda$ Definimos a medida de Lebesgue-Stieltjes em intervalos da forma $(a,b]$ pela fórmula:

$$\mu_F(a,b] = F(b) - F(a)$$

e pelos teoremas de extensão que já vimos antes sabemos estender a medida.

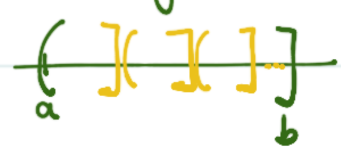
Afirmação: $\mu_F \ll \lambda$ e $\dfrac{d\mu_F}{d\lambda} = \varphi$

Ora $\mu_F(A) = \int_A \varphi \, d\lambda \quad \forall A \in \mathcal{B}$

Para provar a igualdade acima vamos considerar $\mathcal{C}$ a classe dos conjuntos em $\mathcal{B}$ para os quais vale a igualdade.

Depois queremos provar que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra e a prova termina. Para tal vamos provar que $\mathcal{C}$ é uma classe monótona pois este é mais um exemplo em que é complicado provar que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra pois estamos a trabalhar com integrais e como as uniões não são necessariamente disjuntas temos problemas. Vamos então provar que $\mathcal{C}$ é uma classe monótona. Vamos provar a identidade para elementos da álgebra gerada pelos semi-intervalos. Seja $A \in \mathcal{A}$. Então

$$(a,b] = A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$$



$$\mu_F(A) = \mu_F(a,b] = F(b) - F(a)$$

$$\mu_F\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i, b_i] = \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \varphi \, d\lambda$$

$$= \int \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(a_i, b_i]} \varphi \, d\lambda$$

$$= \int \mathbb{1}_{(a,b]} \varphi \, d\lambda$$

$$= \int_A \varphi \, d\lambda$$

Logo a igualdade vale para elementos da álgebra.

Seja $\mathcal{C} = \left\{ A \in \mathcal{B} : \mu_F(A) = \int_A \varphi \, d\lambda \right\}$.

Afirmação: $\mathcal{C}$ é uma classe monótona.

- $A_n \uparrow A$ (usar a continuidade de μ_F por baixo e o TCM).
- $A_n \downarrow A$ (usar a continuidade de μ_F por cima - μ_F finita e TCD).

Daqui resulta que $\mathcal{C}$ é uma classe monótona e contém a algebra gerada pelos intervalos da forma $(a,b]$; $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

$\therefore \mathcal{C} = \mathcal{B}$.

obs $\mu_F \ll \lambda$ porque se $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu_F(A) = 0$.

$\therefore \varphi$ é uma derivada de R.Nikodym.

Def: Mensurabilidade em espaços arbitrários.

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow[f]{} (\Lambda, \mathcal{G})$$

f é mensurável sse $\forall A \in \mathcal{G}$ $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

$\boxed{*}$ Nota que já tínhamos feito esta definição antes quando $\Lambda = \mathbb{R}$ e $\mathcal{G} = \mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel.

Seja μf^{-1} uma medida definida em $(\Lambda, \mathcal{G})$ através da seguinte relação
$$\mu f^{-1}(A) = \mu(f^{-1}(A)) \quad \text{para } A \in \mathcal{G}.$$

Lema: se

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & (\Lambda, \mathcal{G}) \arrow[d, "h"] \\
& (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})
\end{tikzcd}$$

f mensurável

h $\overline{\mathcal{B}}$ mensurável

Então $h \circ f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e

$$\int h(f)\, d\mu = \int h \, d\mu f^{-1}$$

Pensemos nesta igualdade como uma troca de variáveis

esta igualdade deve ser interpretada da seguinte forma se um integral existe então o outro também existe e coincidem!

Prova: Assumimos que $h \geq 0$. No caso geral fazemos $h = h^+ - h^-$.

Seja $h = 1\!\!1_E$ com $E \in \mathcal{G}$.

Ora $\displaystyle\int h \, d\mu f^{-1} = \mu f^{-1}(E)$

$$\int h(f)\, d\mu = \int \underbrace{1\!\!1_E(f)}\, d\mu$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \in E \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = 1\!\!1_{\{f(x) \in E\}} = 1\!\!1_{\{f^{-1}(E)\}}$$

$$= \int 1\!\!1_{f^{-1}(E)}\, d\mu = \mu\left(f^{-1}(E)\right)$$

$$\therefore \mu f^{-1}(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

Assim a igualdade fica provada para funções indicadoras e uma conta simples permite provar a igualdade para funções simples. Depois basta usar o TCM para passar para $h \geq 0$ mensurável. ✓

__Exemplo__: $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow (\Lambda, \mathcal{G}, \nu)$ $\quad \nu$ σ-finita

$f: \Omega \longrightarrow \Lambda$ mensurável

$h: \Lambda \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\quad \overline{\mathcal{B}}$-mensurável.

μf^{-1} σ-finita e $\mu f^{-1} \ll \nu$ ambas em $\mathcal{G}$

Seja $\varphi = \frac{d\mu f^{-1}}{d\nu}$. Então temos

$$\int h(f)\, d\mu = \int h\, d\mu f^{-1} = \int h \varphi\, d\nu$$

Vamos provar esta igualdade

$$\varphi = \frac{d\mu f^{-1}}{d\nu}$$

__obs__: $\sigma \ll \nu$ $\quad \sigma, \nu$ σ-finitas

$$\int h\, d\sigma = \int h \frac{d\sigma}{d\nu}\, d\nu \quad \boxed{**}$$

esta igualdade é no sentido que mencionamos acima, se um integral existe então o outro também existe e coincidem.

Vamos provar esta afirmação. Ora $\sigma(E) = \int_E \frac{d\sigma}{d\nu}\, d\nu$. Seja $\varphi = \frac{d\sigma}{d\nu}$

Seja $h = \mathbb{1}_E$. Então

$$\int \underbrace{\mathbb{1}_E}_{h}\, d\sigma = \sigma(E) \overset{TRN}{=\!=\!=} \int_E \varphi\, d\lambda = \int \mathbb{1}_E \varphi\, d\lambda = \int h \varphi\, d\lambda$$

Vale então para indicadora, para funções simples também vale pela linearidade do integral e pelo TCM vale para funções mensuráveis e positivas e portanto vale para toda h mensurável.

<u>Exemplo</u>: Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ monótona, contínua e estritamente crescente e seja μ_F definida em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ por

$$\mu_F\,(a,b] = F(b) - F(a).$$

Vamos definir $\mu_F F^{-1}$?

$\mu_F F^{-1}(a,b] = ?$

Ora por definição $\mu_F F^{-1}(a,b] = \mu_F\left(F^{-1}(a,b]\right)$

$$\underset{\substack{F \text{ est.} \\ \text{crescente}}}{=} \mu_F\left((F^{-1}(a), F^{-1}(b)] \right)$$

$$= F(F^{-1}(b)) - F(F^{-1}(a)) = b - a$$

$$= \lambda(a,b]$$

$\therefore\ \mu_F F^{-1} \equiv$ Lebesgue

Vamos aplicar a identidade que vimos acima neste caso concreto.

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável. Ora

$$\int h(f)\, d\mu = \int h\, \varphi\, d\nu \qquad f = F \quad \mu = \mu_F \quad \nu = \text{leb} = \lambda$$

ie

$$\varphi = \frac{d\mu_F F^{-1}}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{d\lambda} = 1$$

$$\int h(F)\, d\mu_F = \int h\, d\lambda$$

e se $h = \mathbb{1}_{(a,b]} h_0$, então teríamos

$$\int \left(\mathbb{1}_{(a,b]} h_0\right)(F)\, d\mu_F = \int \mathbb{1}_{(a,b]} h_0\, d\lambda = \int_a^b h_0\, d\lambda$$

$$\int \mathbb{1}_{(a,b]}(F)\, h_0(F)\, d\mu_F = \int \mathbb{1}_{\{a < F(x) \leq b\}}\, h_0(F)\, d\mu_F$$

e se F é estritamente crescente temos

$$\int_{\underbrace{F^{-1}(a)}_{A}}^{\overbrace{F^{-1}(b)}^{B}} h_0(F)\, d\mu_F = \int_a^b h_0 \, d\lambda$$

Então vale a seguinte fórmula $\displaystyle\int_A^B h_0(F)\, d\mu_F = \int_{F(A)}^{F(B)} h_0 \, d\lambda$

Agora vamos analisar diferentes tipos de convergência de funções definidas em espaços de medida.

O Espaço de funções mensuráveis

Neste capítulo vamos discutir diferentes tipos de convergência de funções mensuráveis. Vamos assumir que estamos a trabalhar com um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Ω σ-finito $\mathcal{F}$-completa.

Já vimos anteriormente que se $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ e se $f \in \mathcal{F}$ e $f = g$ q.e. então $g \in \mathcal{F}$.

Seja então

$$M = \{ f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ mensurável} \}$$

Vamos dizer que duas funções $f_1, f_2 \in M$ são equivalentes se $f_1 = f_2$ q.e., e vamos representar $f_1 \sim f_2$.

Ou seja $f_1 \sim f_2$ sse $\mu(f \neq g) = 0$. Mostre que $\sim$ é de facto uma relação de equivalência ($f \sim f$, $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ e se $f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$) (verifique)

Seja $\mathcal{M} = M/_{\sim}$. Funções no espaço $\mathcal{M}$ são elementos das classes de equivalência, ie um elemento representativo da classe.

Vamos discutir os seguintes tipos de convergência:

1 Convergência pontual / quase certa

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{q.c.} f$$

2 Convergência uniforme quase certa

$$f_n \xrightarrow{u.q.c.} f$$

③ Convergência quase uniforme

④ Convergência em medida

① Convergência pontual

$f_n, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_n \longrightarrow f$ pontualmente $\Longleftrightarrow$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in E$

Esta convergência tem de ser verificada para todo $x \in E$.

Agora podemos enfraquecer este tipo de convergência, sem exigir que tal seja verdade para todo $x \in E$ mas que possa não valer num conjunto de medida nula.

Def $(f_n)_n$ é uma seq de Cauchy em E se dado $x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.q $\forall n, m \geq n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

Convergência quase certa

$f_n, f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{q.c.} f$ (ou q.t.p.) se $\exists E \in \mathcal{F}$ tq $\mu(E^c) = 0$ e $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ $\forall x \in E$ (ie em E vale convergência pontual)

(Exepto num conjunto de medida nula vale a convergência pontual).

Vamos agora verificar que esta definição faz sentido ie que no conjunto $\mathcal{M}$ não depende do representante da classe de equivalência).

Suponhamos então que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{q.c.} f$, e que $f_n \sim g_n$ e $f \sim g$. Afirmamos que $g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{q.c.} g$.

Como $f_n \xrightarrow{q.c.} f$ então $\exists E \in \mathcal{F}$ t.q $\mu(E^c) = 0$ e $f_n(x) \longrightarrow f(x) \forall x \in E$.

Por outro lado $f_n \sim g_n$, então $\exists F_n \in \mathcal{F}$ tq $\mu(F_n^c) = 0$ e $f_n(x) = g_n(x)$ $\forall x \in F_n$.

Como $f \sim g$ $\exists F \in \mathcal{F}$ tq $\mu(F^c) = 0$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in F$.

Seja agora $A = \left(\bigcap_{n \geq 1} F_n \right) \cap F \cap E$. Ora $A \in \mathcal{F}$, pois cada conjunto $\in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra. Por outro lado $\mu(A^c) = 0$. Ora como

$A^c = \left(\bigcup_{n\geq 1} F_n^c\right) \cup E^c \cup F^c$ e $\mu(A^c) \leq \mu(E^c) + \mu(F^c) + \sum_{n\geq 1} \mu(F_n^c) = 0.$

$\therefore \mu(A^c) = 0.$

Finalmente, se $x \in A$ então $g_n(x) \longrightarrow g(x)$. Para verificar que tal é verdade, note que se $x \in A$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x\in A \Rightarrow x\in F_n \,\forall n}}{g_n(x) = f_n(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ x\in A \Rightarrow x\in E}}{\longrightarrow} \underset{\substack{\uparrow \\ x\in A \Rightarrow x\in F}}{f(x) = g(x)}$$

$\therefore g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$ ie $g_n \longrightarrow g$ q.c.

$\therefore$ a convergência não depende do representante da classe de equivalência.

Obs Se $f_n \longrightarrow f$ q.c. e $f_n \longrightarrow g$ q.c. $\Longrightarrow f = g$ q.c.

Ora como $f_n \longrightarrow f$ q.c., $\exists E \in \mathcal{F}$ tq $\mu(E^c) = 0$ e $\forall x \in E$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Analogamente, $\exists F \in \mathcal{F}$ t.q. $\mu(F^c) = 0$ e $\forall x \in F$ $f_n(x) \longrightarrow g(x)$.

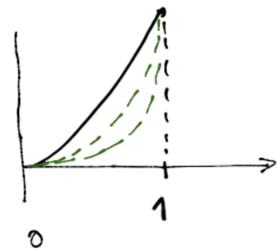
Tomando $A = E \cap F$, então $\mu(A^c) = \mu(E^c \cup F^c) \leq \mu(E^c) + \mu(F^c) = 0$ e se $x \in A$ $g(x) = \lim_n f_n(x) = f(x)$. Logo $g = f$ q.c. e portanto $g \sim f$.

Exemplo: $[0,1]$, $\mathcal{L}$ = σ-álgebra de Lebesgue em $[0,1]$.

λ = medida de Lebesgue

Lembre que este espaço é completo e como λ é finita é claramente

σ- finito. Sejam $f_n(x) = x^n$



$f_n(x) \longrightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1)$ mas $\underset{1}{\underset{\parallel}{f_n(x)}} \not\longrightarrow 0$, se $x = 1$.

$\therefore \; f_n(x) \not\longrightarrow 0$ pontualmente

mas $f_n(x) \longrightarrow \underset{f(x)}{\underset{|||}{0}}$ λ- q.c.

Este exemplo mostra que a convergência quase certa não implica a convergência pontual.

2 Convergência uniforme quase certa

A convergência uniforme diz que se $f_n, f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

esta ordem não depende de x!

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u.} f$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0 \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in E$

ou $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

A noção de convergência uniforme quase certa diz que

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u.q.c.} f$; $f_n, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ se $\exists \; E \in \mathcal{F}$ t.q. $\mu(E^c) = 0$ e $f_n \xrightarrow[E]{u.} f$ ie $f_n \to f$ uniformemente em E.

Todas estas noções têm significado mesmo quando as funções não são mensuráveis. No entanto, a noção de convergência uniforme q.c.

pode ser expressa em termos de uma métrica quando restrita ao conjunto das funções mensuráveis.

Vamos definir o supremo essencial.

Seja $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que f é essencialmente limitada se $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tq $\mu\{x : |f(x)| > a\} = 0$. Neste caso, definimos o supremo essencial de f como

$$\text{ess sup } |f| = \inf\{a > 0 : \mu\{|f| > a\} = 0\}.$$

Se a for tal que $\mu\{|f| > a\} = 0$ então $\forall\, b > a$ $\mu\{|f| > b\} = 0$

pois se $|f| > b > a$

$\therefore \mu\{|f| > b\} \leq \mu\{|f| > a\} = 0.$

definimos o supremo essencial como o menor desses valores!

Exemplo:

$\lambda =$ Lebesgue

Então $\sup \text{ess}|f| = 1$ porque apesar de $f(\frac{1}{2}) = 2$, $\lambda\{\frac{1}{2}\} = 0$.

obs $\sup |f| = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$ e $\text{ess sup } |f| \leq \sup |f|$

No exemplo acima vimos que a desigualdade pode ser estrita.

Observações: (1) Se ess sup $|f| = C$. Então

$$\mu\{x : |f(x)| > C\} = 0$$

Provemos esta observação:

$\forall n \geq 1 \quad \mu\{x : |f(x)| > c + \frac{1}{n}\} = 0$ (isto vale pela definição de ínfimo, pois se a medida deste conjunto não fosse 0 então o sup.ess. não podia ser C)

Ora, agora temos $\mu\{\bigcup_{n\geq 1} \underbrace{\{x : |f(x)| > c + 1/n\}}_{A_n}\} = 0$ (pois por Boole $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = 0$.)

Agora observe que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \subseteq \{x : |f(x)| > C\}$. Para provar esta igualdade basta ver que

$|f(x)| > c + 1/n > C$ e isto vale para todo $n \geq 1$.

Por outro lado $\underbrace{\{x : |f(x)| > c\}}_{A} \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Ora se $x \in A$ então

$|f(x)| > c$, logo $\exists \tilde{n}$ tq $|f(x)| > c + 1/\tilde{n}$ e portanto $x \in A_{\tilde{n}}$ $\therefore x \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$.

$$\therefore A = \bigcup_{n\geq 1} A_n.$$

$$\therefore \mu(A) = 0.$$

$$\therefore \mu\{x : |f(x)| \overset{*}{>} \text{ess sup} |f|\} = 0 \quad \checkmark$$

Obs se em (*) tomarmos $\geq$ em vez de $>$ a observação atrás é falsa pois no exemplo anterior ess sup $|f| = 1$ e

$$\lambda\{x : |f(x)| \geq 1\} = \lambda([0,1]) = 1.$$

Se no exemplo tomassemos f definida em $\mathbb{R}$ teriamos na igualdade anterior $\lambda\{x : |f(x)| \geq 1\} = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.

$\checkmark$

(2) O supremo essencial é uma propriedade da classe de equivalência ie $f \sim g \Longrightarrow$ ess sup$|f|$ = ess sup$|g|$.

Assuma que $f \sim g$ então $\exists E \in \mathcal{F}$ tq $\mu(E^c) = 0$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$.
Seja c = ess sup $|f|$ e vamos estimar

$$\mu\underbrace{\{x : |g(x)| > c\}}_{A} \leq \mu(A \cap E) + \underbrace{\mu(A \cap E^c)}_{\leq \mu(E^c) = 0}$$

$$\mu(A \cap E) = \mu(\{x : |f(x)| > c\} \cap E)$$

$$\leq \mu\{x : |f(x)| > c\}$$

$\therefore$ $\mu\{x : |g(x)| > c\} \leq \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0$ pelo que já vimos antes.

Daqui resulta que ess sup$|g| \leq c$ = ess sup $|f|$.
Agora podemos repetir a prova trocando g por f e vamos obter a

outra desigualdade, o que nos permite provar a observação i.e

$$\text{ess sup}|f| = \text{ess sup}|g|.$$

③ Vamos agora introduzir uma distância da seguinte forma.

$d(f,g) = \text{ess sup}|f-g|$, $f,g \in \mathcal{M}$ (o espaço das classes de equivalência)

- Claramente que d é simétrica i.e $d(f,g) = d(g,f)$.
- $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$ q.c. i.e. $f \sim g$.

Para provar esta implicação o que temos de fazer é provar que se $\text{ess sup}|f| = 0$ então $f = 0$ q.c. Para tal note que,

$\mu\{x : |f(x)| > \frac{1}{n}\} = 0$ uma vez que $\text{ess sup}|f| = 0$, logo $\frac{1}{n} > 0$ e portanto vale a igualdade.

Então
$$\mu\Big\{\bigcup_{n\geq 1}\{x : |f(x)| > 1/n\}\Big\} = 0$$

e
$$\bigcup_{n\geq 1}\{x : |f(x)| > 1/n\} = \{x : |f(x)| > 0\}$$

$$\therefore \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ q.c.}$$

- desigualdade triangular

$$d(f,h) \leq \underbrace{d(f,g)}_{\alpha} + \underbrace{d(g,h)}_{\beta}, \quad f,g,h \in \mathcal{M}.$$

Ora $\mu\{x : |f(x) - h(x)| > \alpha + \beta\}$?

$$\alpha+\beta < |f(x)-h(x)| < |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$$

Então acontece uma de duas:

- ou $|f(x)-g(x)| > \alpha$
- ou $|g(x)-h(x)| > \beta$

pois se ambos fossem $\leq \alpha$ e $\leq \beta$ a soma não seria maior do que $\alpha+\beta$. Então

$$\mu\{x: |f(x)-h(x)| > \alpha+\beta\}$$

$$\leq \underbrace{\mu\{x: |f(x)-g(x)| > \alpha\}}_{= 0 \text{ porque } \alpha = \operatorname{ess\,sup}|f-g|} + \underbrace{\mu\{x: |g(x)-h(x)| > \beta\}}_{= 0 \text{ porque } \operatorname{ess\,sup}|g-h| = \beta}$$

Logo $\mu\{x: |f(x)-h(x)| > \alpha+\beta\} = 0$

Daqui resulta que $\underbrace{\operatorname{ess\,sup}|f-h|}_{= d(f,h)} \leq \alpha+\beta$.

✓

④ $$\boxed{f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u.q.c.} f \iff d(f_n, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Isto diz-nos que a topologia induzida pela convergência uniforme quase certa é metrizável.

($\Longrightarrow$) Ora como $f_n \xrightarrow{uqc} f$ $\exists E \in \mathcal{F}$ tq $\mu(E^c) = 0$ e $f_n \to f$ unif em E.

Queremos provar que dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f) \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Para $\varepsilon > 0$ fixado $\exists n_0$ tq $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Dado $n \geq n_0$, temos que $\mu \underbrace{\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}}_{\subseteq E^c} \leq \mu(E^c) = 0.$

Então $\text{ess sup} |f_n - f| \leq \varepsilon$ pois é o ínfimo.

$$\therefore \ d(f_n, f) \leq \varepsilon. \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que $d(f_n, f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ie $\text{ess sup} |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Então $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ se tem $\text{ess sup} |f_n - f| \leq \varepsilon$.

Logo $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$

A partir deste conjunto vamos construir o conjunto E no qual vale a convergência uniforme.

Seja $k \geq 1$ e seja $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. Ora $\exists n_k$ tq se $n \geq n_k$

$$\mu \{ \underbrace{x : |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1}{2^k}}_{B_k^n} \} = 0.$$

Então $\mu \left\{ \bigcup_{n \geq n_k} B_k^n \right\} = 0$ por Boole. Como vale para todo $k \geq 1$ temos

$$\mu \left\{ \underbrace{\bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq n_k} B_k^n}_{} \right\} = 0.$$

Vamos chamar a este conjunto de E^c. $\therefore \mu(E^c) = 0$.

$E^c \in \mathcal{F}$.

Falta provar que em E vale a convergência uniforme.

Ora $E = \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{n \geq n_k} (B_k^n)^c$

$$= \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq n_k} \{x : |f_n(x) - f(x)| \leq 1/2^k\}$$

Vamos ver que neste conjunto vale a convergência uniforme.

Como $\frac{1}{2^k} \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\frac{1}{2^{k_0}} \leq \varepsilon$. Seja $n \geq n_{k_0}$. Para $x \in E$

esta é a ordem que corresponde a k_0.

temos $x \in \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq n_k} (B_k^n)^c$. Logo $x \in \bigcap_{n \geq n_{k_0}} (B_{k_0}^n)^c$

e portanto $\forall n \geq n_{k_0}$ $\quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^{k_0}} \leq \varepsilon$ e pronto.

Seja $\mathcal{L}_\infty = \{ f \in \mathcal{M} : \text{ess sup} |f| < \infty \}$.

$\mathcal{L}_\infty$ é um espaço linear ie $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ então

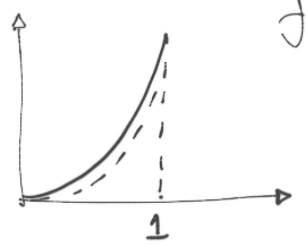
$$\alpha f + g \in \mathcal{L}^\infty.$$

Temos de ver que $\quad \text{ess sup}|\alpha f| = |\alpha| \text{ ess sup}|f|$ (Exercício)

$$\text{ess sup } |f+g| \leq \text{ess sup}|f| + \text{ess sup}|g|. \circledast$$

$\circledast$ esta última desigualdade já foi vista acima quando provamos que d é uma métrica.

Exemplo: $[0,1]$, $\mathcal{L}$, λ $\quad f_n(x) = x^n$



$f_n \longrightarrow f$ q.c. mas $f_n \not\longrightarrow f$ u.q.c.

A convergência não é uniforme em nenhum intervalo que contenha o 1. Precisamos de tirar um conjunto de medida positiva perto do 1 para que a convergência fosse uniforme.

É exatamente este exemplo que nos motiva a introduzir o novo tipo de convergência.

③ Convergência quase uniforme.

Vamos dizer que $f_n, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad f_n \xrightarrow{q.u} f$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tq $\mu(E_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ (já não pedimos que tenha medida nula) e $f_n \to f$ uniformemente em E_ε.

Este tipo de convergência pode ser analisado no exemplo acima. Ora

Ex

$f_n(x) = x^n$, fixo $\varepsilon > 0$, e seja $E_\varepsilon^c = [1-\varepsilon, 1]$

Então $\lambda(E_\varepsilon^c) = \varepsilon$ e no intervalo $[0, 1-\varepsilon)$ temos

$f_n \longrightarrow f$ uniformemente.

COMPAREMOS

é a mais forte

$\mu(\Omega) < \infty$

$f_n \longrightarrow f$ q.c. $\Longleftarrow$ $f_n \longrightarrow f$ unif. q.c. $\Longrightarrow$ $f_n \longrightarrow f$ q.unif.

Vamos provar que se $f_n \longrightarrow f$ q.unif. então $f_n \longrightarrow f$ q.c.

Ora $\forall k \; \exists E_k$ tq $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em E_k e $\mu(E_k^c) \leq \frac{1}{k}$.

Ora convergência uniforme implica convergência pontual. Logo

$\mu\left(\bigcap_{k\geq 1} E_k^c\right) \leq \mu(E_{k_0}^c) \leq \frac{1}{k_0}$ e como vale para qualquer k_0 concluimos que $\mu\left(\bigcap_{k\geq 1} E_k^c\right) = 0$. Seja $E = \left(\bigcap_{k\geq 1} E_k^c\right)^c = \bigcup_{k\geq 1} E_k$

Ora $\mu(E^c) = 0$ e se $x \in E \Longrightarrow x \in E_k$ para algum k e em E_k vale a convergência pontual.

Agora vamos provar a implicação que falta. Neste caso precisamos de $\mu(\Omega) < \infty$.

$$f_n \longrightarrow f \text{ q.e.} \longrightarrow f_n \rightrightarrows f. \text{ q.unif.}$$

Na verdade este resultado é o chamado Teorema de Egoroff.

Teorema (EGOROFF)

Se $\mu(\Omega) < \infty$ e $f_n \longrightarrow f$ q.c. $\Longrightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ quase uniformemente.

Prova:

Como $f_n \longrightarrow f$ q.c. $\forall \varepsilon \; \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Então $\forall k \; \exists n \; \forall \ell \geq n \; |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$.

ie $\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{\ell \geq n} \left\{x : |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\right\}$ é o conjunto onde vale a convergência pontual. Logo a medida do complementar é nula.

Ie $\mu\left(\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{\ell \geq n} \{ x : |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \} \right)^c = 0$

$$\begin{array}{c} \| \\ \mu\left(\bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{\ell \geq n} \{ x : |f_\ell(x) - f(x)| > 1/k \} \right) = 0 \end{array}$$

Como este conjunto é uma união e tem medida zero, então

$$\forall k \quad \mu\Big(\bigcap_{n\geq 1} \underbrace{\bigcup_{\ell \geq n} \{ x : |f_\ell(x) - f(x)| > 1/k \}}_{A_n} \Big) = 0$$

$A_n \downarrow$ porque $A_n \supseteq A_{n+1}$

$\therefore A_n \downarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n$

Como $\mu(\Omega) < \infty$ podemos usar a continuidade por cima de μ, ie

$\forall k \quad \mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ie $\forall k \geq 1, \ \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{\ell\geq n} \{ x : |f_\ell(x) - f(x)| > 1/k \} \right) = 0$

Fixo $\varepsilon > 0$, $\exists \underset{\underset{n_{\varepsilon,k}}{\shortparallel}}{n}$ t.q. $\forall n \geq n_{\varepsilon,k}$ $\mu\left(\bigcup_{\ell\geq n} \{ x : |f_\ell(x) - f(x)| > 1/k \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$

A desigualdade anterior também vale para $n = n_{\varepsilon,k}$ ie

$$\mu\left(\bigcup_{\ell\geq n_{\varepsilon,k}} \{ x : |f_\ell(x) - f(x)| > 1/k \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Tomando a união em k temos

$$\mu\Big(\overbrace{\bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{\ell\geq n_{\varepsilon,k}} \{ x : |f_\ell(x) - f(x)| > 1/k \}}^{\shortparallel\ E_\varepsilon^c} \Big) \leq \sum_{k\leq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

$$E_\varepsilon = \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{\ell \geq n_{\varepsilon,k}} \left\{ x : |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

Falta ver que vale a convergência uniforme em E_ε.

Fixo $\delta > 0$. Escolho k tal que $\frac{1}{k} \leq \delta$. Para esse k, fixo $\ell \geq n_{\varepsilon,k}$ e para este ℓ, temos $|f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \leq \delta$.

$$\therefore \forall \ell \geq n_{\varepsilon,k} \quad \sup_{x \in E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \delta$$

Fixe $x \in E_\varepsilon$. Então x pertence a $\bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{\ell \geq n_{\varepsilon,k}} \left\{ x : |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$

então $\forall k$

$$x \in \bigcap_{\ell \geq n_{\varepsilon,k}} \left\{ x : |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

$$\therefore \forall \ell \geq n_{\varepsilon,k} \quad x \in \left\{ x : |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

Logo $\quad |f_\ell(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \leq \delta$

$$\therefore \forall \ell \geq n_{\varepsilon,k} \quad \sup_{x \in E_\varepsilon} |f_\ell(x) - f(x)| \leq \delta.$$

$\therefore$ vale a conv. uniforme em E_ε. ✓

4) Convergência em medida.

Sejam $f_n, f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ em medida se $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \mu\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

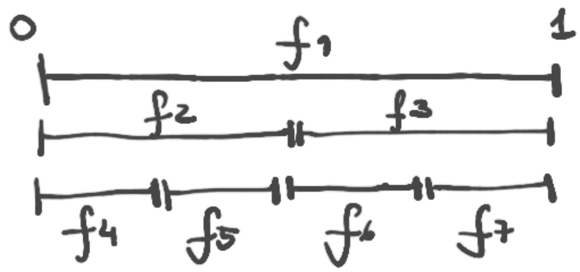
Exemplo Convergência em medida não implica convergência pontual.

$\Omega = [0,1)$; $\lambda =$ medida de Lebesgue , $\mathcal{L}$

Seja $f_1 = \mathbb{1}_{[0,1)}$ (nível 1)

$f_2 = \mathbb{1}_{[0,1/2)}$; $f_3 = \mathbb{1}_{[1/2,1)}$ (nível 2)

$f_4 = \mathbb{1}_{[0,1/4)}$; $f_5 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2)}$ ... (nível 3)



$f_{2^{k-1}}$ .... (nível k)

$f_n \xrightarrow{\mu} 0$

$f_n(x) \not\to 0$ para nenhum $x \in [0,1)$. Ora $\forall x$ $f_n(x)$ tem uma subsequência que vale 0 em x e outra que vale 1. Logo a sequência não converge em nenhum $x \in [0,1)$. No entanto, converge para 0 em medida pois

$$\lambda\{x : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \begin{cases} 0 & ; \quad \varepsilon > 1 \\ ? & \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

Ora seja j um ponto no nível k, então, $2^{k-1} \leq j \leq 2^k - 1 \leq 2 \cdot 2^{k-1} - 1 \leq 2 \cdot 2^{k-1}$

e $f_j(x) = \mathbb{1}_{I_k}$ onde I_k é um intervalo de tamanho $\frac{1}{2^{k-1}}$

$$\therefore \quad \lambda\{x : |f_j(x)| \geq \varepsilon\} = 1/2^{k-1} \leq \frac{2}{j}$$

$\therefore \ \forall j \quad \lambda\{x : |f_j(x)| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{2}{j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

Observação: Suponha que

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f \quad \text{e} \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} g$$

$$\Downarrow$$

$$f = g \ \text{q.c.}$$

A convergência em medida caracteriza o limite

Prova: Ora,

$$\mu\{x : |f(x) - g(x)| \geq \delta\} \leq \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\delta}{2}\} + \mu\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\delta}{2}\}$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \, n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2}\} < \varepsilon/2$

$\exists \, \tilde{n}_0$ tq $\forall n \geq \tilde{n}_0$ $\mu\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\delta}{2}\} < \varepsilon/2$

$\therefore \ \forall \, n \geq \tilde{n}_0 \vee n_0 \quad \mu\{x : |f(x) - g(x)| \geq \delta\} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

$$\therefore \forall \delta, \ \mu\{x : |f(x) - g(x)| \geq \delta\} = 0$$

tomo $\delta = \frac{1}{k}$

e

$$\mu\Big\{\bigcup_{k \geq 1} \{x : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\}\Big\} = 0$$

$$\|$$

$$\mu\{x : |f(x) - g(x)| > 0\} = 0 \quad \therefore f = g \ \text{q.e.}$$

Observação: Se $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f$; $g_n \sim f_n$, $g \sim f$ $\Longrightarrow$ $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} g$

Conv. em medida é uma propriedade da classe!

Prova: Para provar que $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} g$, temos de estimar

$$\mu \{ \underbrace{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon}_{A} \}.$$

Seja $E_n = \{x : f_n(x) = g_n(x)\}$

e $E_0 = \{x : f(x) = g(x)\}$

e seja $E = \bigcap_{n\geq 0} E_n$. Sabemos que $\mu(E^c) = \mu(\bigcup_{n\geq n_0} E_n^c) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ora } \mu(A) &= \mu(A\cap E) + \mu(\overbrace{A\cap E^c}^{\subseteq E^c}) \\ &= \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cap E) + \underset{0}{\mu(E^c)} \\ &\leq \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \\ &\downarrow n\to+\infty \\ &0 \end{aligned}$$

$\therefore g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} g$.

Por isso dizemos que a convergência em medida é uma propriedade da classe de equivalência. Se um elemento da classe converge então todas as funções da mesma classe convergem.

Teorema: $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f \implies \exists\, n_k$ t.q. $f_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{q.c.} f$

Prova: Por definição de convergência em medida,

$$\forall \varepsilon>0 \quad \mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Então $\forall k\geq 1\ \exists\, n_k\ \forall n \geq n_k\ \ \mu\{|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$

Em particular podemos encontrar uma sequência $n_k \uparrow +\infty$

$$\mu\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 1/k\} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

Então $\displaystyle \mu\Big(\bigcup_{k \geq k_0} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 1/k\}\Big) \leq \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k_0}} \quad \forall k_0.$

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcap_{k_0 \geq 1} \bigcup_{k \geq k_0} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 1/k\}}_{\subseteq}\Big) \leq \frac{1}{2^{k_0}} \quad \forall k_0$$

$$\therefore \mu\Big(\underbrace{\bigcap_{k_0 \geq 1} \bigcup_{k \geq k_0} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \tfrac{1}{k}\}}_{E^c}\Big) = 0$$

$\therefore \mu(E^c) = 0.$

Se $x \in E$ então $f_{n_k}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. Provemos esta afirmação.

Ora

$$E = \bigcup_{k_0 \geq 1} \bigcap_{k \geq k_0} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/k\}$$

Se $x \in E$, $\exists\, k_0 : x \in \bigcap_{k \geq k_0} \{x : f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/k\}$

$$\therefore \forall k \geq k_0 \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/k$$

Como $\frac{1}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ temos que $f_{n_k}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$.

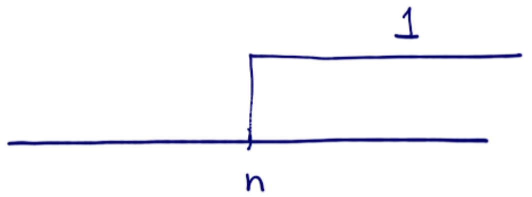
✓

Observação: No exemplo que vimos acima em que tínhamos $f_1 = \mathbb{1}_{[0,1)}$, $f_2 = \mathbb{1}_{[0,1/2)}$; $f_3 = \mathbb{1}_{[1/2,1)}$ ... A subsequência que converge para o q.e. é a aquela em que escolhemos em cada nível a 1ª função ie no nível k escolhemos $f_{n_k} = \mathbb{1}_{[0,1/2^{k-1}]}$. Assim $f_{n_k} \to 0$ q.e.

Agora vamos analisar a implicação contrária, ie

$$f_n \longrightarrow f \text{ q.c.} \quad \underset{✡}{\Longrightarrow} \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f \ ?$$

Exemplo: Convergência quase certa $\not\Longrightarrow$ convergência em medida.



$\Omega = \mathbb{R}$

$\lambda =$ medida de Lebesgue

$0 < \varepsilon < 1 \qquad \lambda\{x : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \lambda([n, +\infty)) = +\infty$

$f_n \longrightarrow 0$ pontualmente.

Precisamos de adicionar uma condição para que a implicação ✡ seja verdadeira.

Teorema: Se $\mu(\Omega) < \infty$

e $f_n \longrightarrow f$ q.c. $\Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f$.

Prova: Pelo Teorema de Egoroff já vimos que se $\mu(\Omega) < \infty$ e $f_n \to f$ q.c. então $f_n \longrightarrow f$ quase uniformemente. Isto significa que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon$ com $(*)$ $E_\varepsilon \in \mathcal{F}$ e $\mu(E_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ e $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em E_ε.

Para provarmos o Teorema temos de provar que

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$ ie para $\delta > 0$ fixado, $\exists\, n(\delta)$ tq $\forall n \geq n(\delta)$ $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leq \delta$.

Dado $\delta > 0$, $\exists E_\delta$ (estamos a tomar em $(*)$ $\varepsilon = \delta$) tq $\mu(E_\delta^c) \leq \delta$

e $f_n \to f$ uniformemente em E_δ. Agora, dado $\varepsilon > 0$ $\overset{\text{vai ser este } \varepsilon}{}$ $\exists\, n(\varepsilon,\delta)$ t.q. se $n \geq n(\varepsilon,\delta)$ $\sup_{x \in E_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Então $\forall n \geq n(\varepsilon,\delta)$ temos

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

$$\leq \underbrace{\mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \cap E_\delta\right)}_{\text{no conjunto } E_\delta \text{ vale}} + \underbrace{\mu(E_\delta^c)}_{\leq \delta}$$

Logo $\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \cap E_\delta = \phi$

$$\therefore \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leq \delta$$

5 Convergência em p-média — Os espaços $\mathcal{L}p$

Lembremos do que já vimos antes que f é μ-integravel sse $|f|$ é μ-integrável. O nosso objetivo agora consiste em introduzir um tipo de convergência que analisa o integral de uma potência p da sequência. Para motivar a introdução aos espaços $\mathcal{L}p$ vamos analisar dois resultados clássicos, e extremamente úteis, a chamada desigualdade de Hölder e Minkowski.

Para tal vamos considerar $p \in [1, +\infty)$ e vamos denotar para $f: \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$\|f\|_p^p = \int |f(x)|^p \mu(dx).$$

A desigualdade de Hölder diz que: Neste caso diremos que p e q são conjugados.

se $\cdot\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se $p \in (1, +\infty)$

$\cdot\ q = +\infty$ se $p = 1$

então se $f, g: \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ t.q. $\|f\|_p < \infty$ e $\|g\|_q < \infty$

vale

Hölder

$$\boxed{\int |f.g| d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int |f.g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q}$$

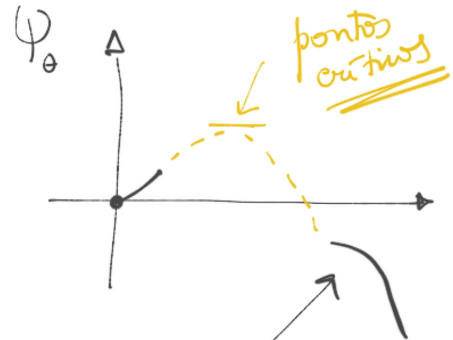
Quando $p = 1$ e $q = +\infty$, $\|g\|_\infty = \text{ess sup} |g|$ e a desigualdade acima também vale: $\int |fg| d\mu \leq \int |f| d\mu \,.\, \text{ess sup} |g|$.

Seja $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função convexa. Como exemplo pensemos em $f(x) = \frac{x^p}{p}$ para $p > 1$. Vamos provar agora a seguinte desigualdade

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$ onde p e q são conjugados: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p \in (1, +\infty)$

A prova da desigualdade de Hölder seguirá facilmente da desigualdade anterior. Vamos agora introduzir a transformada de Legendre de f ie $g(\theta) = \sup_{x>0} \{\theta x - f(x)\}$. Observa que se f for convexa então g é convexa. Vamos restringir-nos ao caso em que $f(x) = \frac{x^p}{p}$. Afirmamos que $g(\theta) = \frac{\theta^q}{q}$. Provemos esta afirmação.

Seja $\varphi_\theta(x) = \theta x - f(x) = \theta x - \frac{x^p}{p}$



1. $\varphi_\theta(0) = 0$

2. $\varphi'_\theta(x)\Big|_{x=0} = \theta - f'(x)\Big|_{x=0} = \theta > 0$

3. $\varphi_\theta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

$\varphi'_\theta(x) = \theta - x^{p-1} = 0 \Rightarrow x = \theta^{1/p-1}$

Logo $\sup\limits_{x>0}\left\{x\theta - \frac{x^p}{p}\right\} = \theta^{\underbrace{1+1/p-1}_{\frac{p}{p-1}}} - \frac{1}{p}\theta^{p/p-1}$

$$= \theta^{\frac{p}{p-1}} - \frac{1}{p}\theta^{\frac{p}{p-1}} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\theta^{p/p-1}$$

$$= \frac{1}{q}\theta^q \checkmark$$

$\boxed{\frac{p}{p-1} = ?}$ → ora $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\therefore \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$ $\therefore \frac{p}{p-1} = q$

Com isto provamos que $g(\theta) = \frac{\theta^q}{q}$.

Então agora temos que

$$\frac{\theta^q}{q} = \sup_{x>0}\left\{\theta x - \frac{x^p}{p}\right\} \geq \theta x - \frac{x^p}{p} \quad \forall x, \theta > 0$$

e com isto provamos que $\boxed{\theta x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{\theta^q}{q}}$

Observa que $$\int |fg|\, d\mu \leq \int \frac{|f|^p}{p}\, d\mu + \int \frac{|g|^q}{q}\, d\mu .$$

basta acima tomar $x = |f|$, $\theta = |g|$ pois como $\theta x \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|\theta|^q}{q}$ temos agora $|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$ e integrando temos

$$\int |fg|\, d\mu \leq \int \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}\, d\mu$$

$$= \int \frac{|f|^p}{p}\, d\mu + \int \frac{|g|^q}{q}\, d\mu$$

e assim se o lado direito da desigualdade for finito, temos que $\int |fg|\, d\mu < \infty$.

Agora vamos introduzir um parâmetro para optimizar a desigualdade anterior e a partir desta desigualdade vamos obter a desigualdade de Hölder. Seja então $\gamma > 0$ e nota que

$$\int \left| f\gamma \, \frac{g}{\gamma} \right| d\mu \leq \frac{1}{p} \int |\gamma f|^p\, d\mu + \frac{1}{q} \int \left|\frac{g}{\gamma}\right|^q d\mu$$

aplicamos a desigualdade anterior a f e g.

Agora vamos minimizar em γ

$$\leq \inf_{\gamma > 0} \left\{ \frac{1}{p} \int |\gamma f|^p\, d\mu + \frac{1}{q} \int \left|\frac{g}{\gamma}\right|^q d\mu \right.$$

Para simplificar a notação, vamos tomar $\alpha = \int |f|^p\, d\mu$

$\beta = \int |g|^q\, d\mu$

e então estamos a procurar

$$\inf_{\gamma>0} \Big\{ \underbrace{\frac{1}{p}\gamma^p \alpha + \frac{1}{q\gamma^q}\beta}_{\psi(\gamma)} \Big\}.$$

Calcular este ínfimo é simples basta repetir o argumento acima.

Quando calculamos $\psi'(\gamma)$ temos

$$\psi'(\gamma) = \gamma^{p-1}\alpha + \frac{(-1)}{\gamma^{q+1}}\beta = 0$$

$$\therefore \gamma^{p-1}\alpha = \frac{\beta}{\gamma^{q+1}}$$

$$\gamma^{p-1+q+1} = \beta/\alpha$$

$$\gamma = \left[\frac{\beta}{\alpha}\right]^{\frac{1}{p+q}}$$

Ora $\psi(\gamma) = \frac{\gamma^p}{p}\alpha + \frac{1}{q\gamma^q}\beta. = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{p}{p+q}}.\alpha}{p} + \frac{1}{q\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{q}{p+q}}}\beta$

$$= \frac{\beta^{\frac{p}{p+q}}.\alpha^{1-\frac{p}{p+q}}}{p} + \frac{\beta^{1-q/p+q}.\alpha^{\frac{q}{p+q}}}{q}$$

$$= \frac{\beta^{\frac{p}{p+q}}.\alpha^{\frac{q}{p+q}}}{p} + \frac{\beta^{\frac{p}{p+q}}.\alpha^{\frac{q}{p+q}}}{q}$$

$$= \beta^{\frac{p}{p+q}}.\alpha^{\frac{q}{p+q}}$$

Então temos

$$\int \left|\frac{f}{\alpha} g\alpha\right| d\mu = \int |fg|\, d\mu \leq \alpha^{\frac{q}{p+q}}.\beta^{p/p+q}$$
$$= \left[\int |f|^p d\mu\right]^{\frac{q}{p+q}} \left[\int |g|^q d\mu\right]^{\frac{p}{p+q}}$$

Ora $\dfrac{q}{p+q} = \dfrac{q/pq}{\frac{p+q}{pq}} = \dfrac{1/p}{\frac{1}{q}+1/p} = \dfrac{1}{p}$

$$\therefore \int |fg|\,d\mu \leq \left[\int |f|^p\,d\mu\right]^{1/p} \left[\int |g|^q\,d\mu\right]^{1/q}$$

Agora vamos ao resto da prova para $p = 1$.

Queremos provar que $\displaystyle\int |fg|\,d\mu \leq \underbrace{\|f\|_1}_{= \int |f|\,d\mu} \cdot \operatorname{ess\,sup}|g|$.

Lembre que $\sup\operatorname{ess}|g| = \inf\{a : \mu\{|g| > a\} = 0\}$. Seja $\alpha = \sup\operatorname{ess}|g|$. Então $\mu\{|g| > \alpha\} = 0$.

Ora $\displaystyle\int |fg|\,d\mu = \underbrace{\int_{\{x : |g(x)| > \alpha\}} |fg|\,d\mu}_{= 0 \text{ pois } \mu\{x : |g(x)| > \alpha\} = 0} + \underbrace{\int_{\{x : |g(x)| \leq \alpha\}} |fg|\,d\mu}_{= \int_{\{x : |g(x)| \leq \alpha\}} |f(x)|\,|g(x)|\,d\mu}$

$$\leq \alpha \int_{\{x : |g(x)| \leq \alpha\}} |f(x)|\,d\mu \leq \alpha \int |f|\,d\mu$$

$$= \operatorname{ess\,sup}|g| \int |f|\,d\mu.$$

A desigualdade de Minkowski

Sejam $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então se $p \in [1, +\infty)$ e $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$ então

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Desigualdade triangular

Prova:

① Para $p=1$ é trivial pois

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \, d\mu \leq \int |f| + |g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu.$$

② Suponhamos que $p > 1$.

$$\int |f+g|^p d\mu = \int |f+g|^{p-1} |f+g| \, d\mu$$

$$\leq \int |f+g|^{p-1} |f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} |g| \, d\mu$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int |f+g|^{\cancel{(p-1)q}\, p} d\mu \right)^{1/q} \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |f+g|^{\cancel{(p-1)q}\, p} d\mu \right)^{1/q} \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p}$$

p e q conjugados

Ora

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p + q = pq$$

$$(p-1)q = pq - q = p$$

$$= \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right)$$

Voltando ao início temos $\int |f+g|^p d\mu \leq \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q} (\|f\|_p + \|g\|_p)$

Então, daqui resulta que

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1-1/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$$''\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/p}'' = \|f+g\|_p$$

$\boxed{\text{obs}}$ que se $p=\infty$ também temos ess sup $|f+g| \leq$ ess sup$|f|$ + ess sup$|g|$ (já vimos)

Exemplo: $\mu = \sum \delta_{x_j}$

$$\sum_{j\geq 1} |a_j \cdot b_j| \leq \left(\sum_j |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j\geq 1} |b_j|^q\right)^{1/q}$$

Agora podemos fazer $\mu = \sum_j \mu_j \delta_{x_j}$ (medida que dá massa μ_j ao ponto x_j)

$$\sum_{j\geq 1} |a_j b_j| \mu_j \leq \left(\sum_{j\geq 1} \mu_j |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j\geq 1} \mu_j |b_j|^q\right)^{1/q}$$

E agora podemos fazer o seguinte

$$\sum_{j\geq 1} \mu_j \left|\frac{a_j}{\theta_j} b_j \cdot \theta_j\right| \leq \left(\sum_{j\geq 1} \theta_j^p |a_j|^p \mu_j\right)^{1/p}$$

$$\times \left(\sum_{j\geq 1} \frac{|b_j|^q \mu_j}{\theta_j^q}\right)^{1/q}$$

Para $1 \leq p \leq +\infty$ vamos chamar de $\mathcal{L}_p$ o seguinte espaço

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ \underset{\text{mensurável}}{f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}} \text{ t.q } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Afirmamos que $\mathcal{L}_p(\mu)$ é um espaço linear i.e dados $f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\alpha f + g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ $(*)$

Já vimos este resultado no caso $p = +\infty$ quando discutimos o ess sup $|f|$. Agora podemos pensar em $p \in (1, +\infty)$.

Ora se $f \in \mathcal{L}_p$ então $af \in \mathcal{L}_p$ pois

$$\int |af|^p d\mu = |a|^p \underbrace{\int |f|^p d\mu}_{<\infty} < \infty.$$

Então para provarmos a afirmação $(*)$ acima, o que temos de provar é que se $f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ então $f+g \in \mathcal{L}_p(\mu)$. Este resultado segue da desigualdade de Minkowski pois

$$\|f+g\|_p \leq \underbrace{\|f\|_p}_{<\infty} + \underbrace{\|g\|_p}_{<\infty} < \infty \quad \checkmark$$

$\therefore$ $\mathcal{L}_p(\mu)$ é um espaço linear.

Lembre que quando $p=1$ temos o espaço $\mathcal{L}_1(\mu)$ e $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$.

$\mathcal{L}_1(\mu)$ é um espaço linear e vamos definir para $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$

$$\rho(f,g) = \int |f-g| d\mu.$$

Afirmação ρ é uma distância na classe de equivalência.

1) $\rho(f,g) = 0 \Longleftrightarrow \int |f-g| d\mu = 0 \Rightarrow f = g$ q.c.

2) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ (trivial)

3) $\rho(f,h) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h)$

Ora $\rho(f,h) = \int |f-h| d\mu = \int |f-g+g-h| d\mu$

$$\leq \int |f-g| + |g-h| d\mu$$

$$= \int |f-g| d\mu + \int |g-h| d\mu$$

$$= \rho(f,g) + \rho(g,h)$$

No caso geral podemos provar as seguintes propriedades:

- $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}p(\mu) \Rightarrow \|af\|_p = |a| \, \|f\|_p$.
- $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ q.c.

  Ora $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = 0 \Rightarrow |f|^p = 0$ qc

  ie $f = 0$ qc.
- $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (desigualdade de Minkowski)

$\therefore$ $\|f\|_p$ é uma norma e $\rho(f,g) = \|f-g\|_p$ é uma distância em $\mathcal{L}p(\mu)$.

Resumindo $\mathcal{L}p(\mu)$ é um espaço linear, $f,g \in \mathcal{L}p$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\alpha f + g \in \mathcal{L}p$.

$\|f\|_p$ é uma norma.

Definimos $\rho(f,g) = \|f-g\|_p$.

ρ é uma distância:

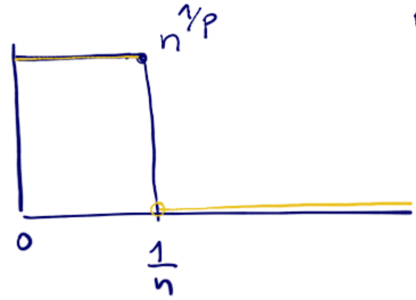
1. $\rho(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$ q.c. ✓
2. $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ ✓
3. $\rho(f,h) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h)$ ✓ (consequência da desigualdade de Minkowski)

Definição Sejam $f_n \in \mathcal{L}p$. Dizemos que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}p} f$, $f \in \mathcal{L}p$ sse $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Agora queremos relacionar este tipo de convergência com os que já vimos anteriormente.

Exemplos

(1)



Ora $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ q.c.

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} 0$

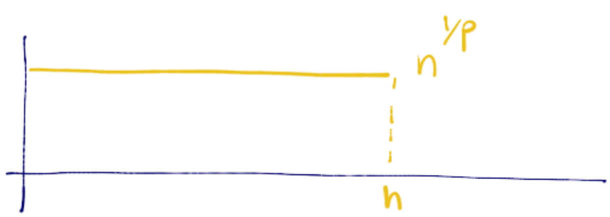
Mas

$$\|f_n\|_p^p = \int |f_n|^p \, d\lambda = \frac{n}{n} = 1$$

λ = medida de Lebesgue

Aqui está um exemplo em que vale a convergência quase certa para $f=0$ mas não vale a convergência em $\mathcal{L}p$.

(2)



Ora aqui

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ uniformemente.

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\lambda} 0$

λ = medida de Lebesgue

Mas $\|f_n\|_p = \int |f_n|^p \, d\lambda = n^2 \longrightarrow +\infty$

Antes de relacionarmos estes tipos de convergências vamos provar que o espaço $\mathcal{L}p(\mu)$ introduzido acima é de facto completo. Para tal vamos introduzir a noção de sequência de Cauchy.

Definição: Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}p(\mu)$. $(f_n)_{n\geq 1}$ diz-se uma sequência de Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ t.q. $\forall n, m \geq n_0$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon.$$

Teorema Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_p(\mu)$, com $f_n \in \mathcal{L}_p(\mu)$ então $\exists\, f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ tq $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

ie $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}_p} f$

Este teorema diz-nos que o espaço $\mathcal{L}_p(\mu)$ é completo.

Prova: Ora $f_n \in \mathcal{L}_p(\mu)$, $(f_n)_n$ é de Cauchy em $\mathcal{L}_p(\mu)$.

Então $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ tq. $\forall n,m \geq n_0$ $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$.

Acima podemos escrever $\|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon$ para não termos de estar preocupados com as potências.

Seja $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^{k(p+1)}}$. Então $\exists n_k$ tq $\forall n,m \geq n_k$

$$\|f_n - f_m\|_p^p \leq \frac{1}{2^{k(p+1)}}$$

Observe que para $k=1$ $\exists n_1$ tq $\forall n,m \geq n_1$ vale $\|f_n - f_m\|_p^p \leq \frac{1}{2^{p+1}}$

Para $k=2$ $\exists n_2$ tq $\forall n,m \geq n_2$ vale $\|f_n - f_m\|_p^p \leq \frac{1}{2^{2(p+1)}}$

e daí em diante. Logo a sequência n_k pode ser escolhida de modo a ser crescente, ie $n_k \uparrow$, basta sempre escolher n_{k+1} maior do que os anteriores.

Então podemos acima, para esta sequência, escolher $m = n_k$, $n = n_{k+1}$ e temos $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p^p \leq 1/2^{k(p+1)}$

Ora $\mu\underbrace{\left\{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \frac{1}{2^k}\right\}}_{A_k} = \displaystyle\int_{A_k} d\mu$

$$\leq \int_{A_k} 2^{kp} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|^p \, d\mu$$

$$\leq \int 2^{kp} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|^p \, d\mu$$

usamos esta cota.

$$\leq \frac{1}{2^k}$$

Ora $\mu\left(\bigcup_{k \geq m} \{x : |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{1}{2^k}\}\right) \leq \sum_{k \geq m} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}$

Definimos agora $F^c = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} \{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \frac{1}{2^k}\}$

Então $\mu(F^c) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq m} \{x : |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{1}{2^k}\}\right) \leq \frac{1}{2^{m-1}} \quad \forall m$

$$\therefore \mu(F^c) = 0$$

- Agora vamos provar que a sequência $(f_{n_k}(x))_k$ é de Cauchy, $x \in F$.

Seja $x \in F$. Então

$$x \in F = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \geq m} \{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k}\}$$

$\therefore \exists m \geq 1$ tq $x \in \bigcap_{k \geq m} \{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k}\}$

$$\therefore \quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq m.$$

Seja $j > k \geq m$ temos $|f_{n_j}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{i=k}^{j-1} |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)|$

$$\leq 1/2^{k-1}$$

Daqui resulta que a sequência $(f_{n_k}(x))_k$ é uma sequência de Cauchy

Dado $\delta > 0$ $\exists \tilde{k} \geq m$ tq $\frac{1}{2^{\tilde{k}-1}} \leq \delta$ e para j e $k \geq \tilde{k} \geq m$ vale

$$|f_{n_j}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{2^{\tilde{k}-1}} \leq \delta.$$

$\therefore$ $(f_{n_k}(x))_k$ é uma sequência de Cauchy $\forall x \in F$.

Até aqui provamos que $\exists F \in \mathcal{F}$ tq $\mu(F^c) = 0$ e existe uma subsequência $n_k \uparrow$ tq $\forall x \in F$ $(f_{n_k}(x))_k$ é uma sequência de Cauchy.

Como $(f_{n_k}(x))_k$ é uma sequência de nºs reais (e de Cauchy), então $\forall x \in F$ $\quad f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$

Ora isto significa que a sequência $f_{n_k} \xrightarrow{q.c.} f$, pois a convergência pontual vale $\forall x \in F$ e $\mu(F^c) = 0$.

Até aqui o limite está só definido para $x \in F$, mas podemos decretar que $f(x) = 0$ $\forall x \in F^c$.

Observe que f é mensurável pois é o limite de funções f_{n_k} que são mensuráveis. $\therefore f \in \mathcal{F}$.

Assim $\quad f: \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $f_{n_k} \xrightarrow{q.e.} f$.

Além disso é fácil ver que esta função $f \in \mathcal{L}p(\mu)$. Vejamos!

Ora em F temos $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in F$ e $\mu(F^c) = 0$.

<u>Obs</u>: Lembre que partimos de uma sequência $(f_n)_n \in \mathcal{L}p(\mu)$.

Vamos agora provar que $\|f_n\|_p \leq C_0$, para C_0 constante, $\forall n \geq 1$.

$(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy, logo

$$\forall \varepsilon \; \exists n_0 \; \forall n,m \geq n_0 \quad \int |f_n - f_m|^p \, d\mu < \varepsilon$$

Escolhemos $\varepsilon = 1$. Então $\exists$ n_0 tq $\forall n,m \geq n_0$

$$\|f_n - f_m\|_p \leq 1$$

Então

$$\|f_n\|_p = \|f_n - f_{n_0} + f_{n_0}\|_p \underset{\text{Minkowski}}{\leq} \underbrace{\|f_n - f_{n_0}\|_p}_{\substack{\leq 1 \\ \text{se } n \geq n_0}} + \|f_{n_0}\|_p$$

Observa que acima temos $\forall n \geq n_0 \quad \|f_n\|_p \leq 1 + \|f_{n_0}\|_p$.

Como para $j = 1, \dots, n_0 - 1 \quad \|f_j\|_p < \infty$

então

$$\|f_n\|_p \leq \max\{\|f_1\|_p, \dots, \|f_{n_0-1}\|_p, 1 + \|f_{n_0}\|_p\} < \infty$$

Provemos agora que $f \in \mathcal{L}p(\mu)$.

Ora

$$\int |f|^p \, d\mu = \int (\mathbb{1}_F + \mathbb{1}_{F^c}) |f|^p \, d\mu$$

em F^c, $f \equiv 0$.

$$= \int |\mathbb{1}_F f|^p \, d\mu$$

Note que

$$(\mathbb{1}_F f_{n_k})(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} (\mathbb{1}_F f)(x) \quad \forall x$$

Pelo Lema de Fatou temos

$$\int |\mathbb{1}_F f|^p \, d\mu \leq \underline{\lim} \int |\mathbb{1}_F f_{n_k}|^p \, d\mu \leq \underline{\lim} \int |f_{n_k}|^p \, d\mu$$

$\leq C_0.$

$\therefore \quad f \in \mathcal{L}_p(\mu).$

Agora vamos provar finalmente a convergência $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}_p(\mu)} f$

Fixo $\varepsilon > 0$. Ora

$$\int |f - f_n|^p \, d\mu \leq \underline{\lim_k} \int |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu \quad (*)$$

de novo o Lema de Fatou

Como a sequência é de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ fixado, $\exists\, n_0$ t.q $\forall n, m \geq n_0$

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon.$$

Se tomarmos em $(*)$ $n \geq n_0$ e k suf grande tq $n_k \geq n_0$ então sabemos que $\underline{\lim} \int |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon$

$$\therefore \quad \int |f - f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

ie $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}_p(\mu)} f$

Agora vamos pensar em relacionar este tipo de convergência com os que introduzimos anteriormente. Pensemos na seguinte questão:

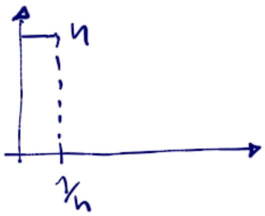
$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f \quad \text{então} \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}_1(\mu)} f \quad ?$$

e o recíproco? vale?

<u>Afirmação</u>: $\quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}_1} f \implies f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f$

<u>Prova</u>: $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} = \int \mathbb{1}_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} \, d\mu \leq \int \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} \, d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exemplo: $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\lambda} f$ mas $f_n \not\xrightarrow{\mathcal{L}_1} f$



$\int f_n \, d\mu = 1 \ \forall n$ mas $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\lambda} 0$ λ = Lebesgue

Vamos ter de colocar hipóteses para que a convergência em medida implique a convergência em $\mathcal{L}_1(\mu)$.

Definição: EQUI-CONTINUIDADE NO ϕ.

Seja $\{\nu_\alpha ; \alpha \in I\}$ uma família de medidas $\nu_\alpha : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

Dizemos que a família é equi-contínua no ϕ se para qualquer sequência $B_n \in \mathcal{F}$, $B_n \downarrow \phi$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$ $\sup_{\alpha \in I} \nu_\alpha(B_n) \leq \varepsilon$

Obs se a família fosse resumida a uma só medida, então atrás estaríamos a pedir a continuidade por cima no ϕ, mas como agora consideramos uma família, pedimos que essa propriedade seja válida uniformemente em α.

Definição Uniforme absoluta continuidade

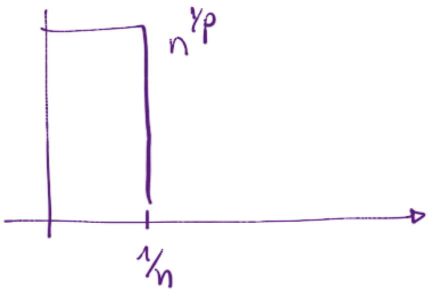
Seja $\{\nu_\alpha ; \alpha \in I\}$ uma família de medidas $\nu_\alpha : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

Dizemos que $\{\nu_\alpha ; \alpha \in I\}$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a μ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $\forall E \in \mathcal{F}$ com $\mu(E) < \delta$

$$\Longrightarrow \sup_{\alpha \in I} \nu_\alpha(E) \leq \varepsilon.$$

Observações:

- Seja $p \in [1, +\infty)$. Então



$f_n \xrightarrow{q.c.} 0$

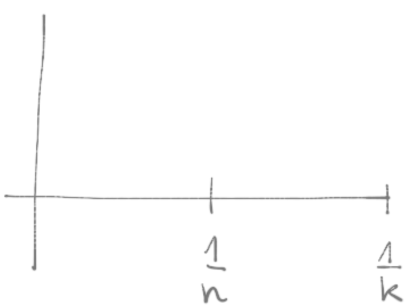
$\|f_n\|_p = 1$

Definimos agora $\nu_n(A) = \int_A |f_n|^p \, d\lambda$. Observa que como $\|f_n\|_p < \infty$ e a medida ν é finita. Por outro lado $\nu \ll \lambda$.

λ = Lebesgue

Mas $(\nu_n)_n$ não é equicontínua no $\emptyset$.

Seja $B_k = (0, 1/k)$. Então como estimamos $\nu_n(B_k)$?

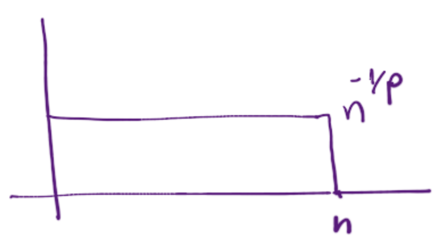


Ora se $n \geq k \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$ então

$\nu_n(B_k) = \int_{B_k} |f_n|^p \, d\lambda = 1$

Logo $\forall n \geq k$ $\nu_n(B_k) = 1$ e por isso a família não é equicontínua no $\emptyset$.

- Seja f_n



$f_n \in \mathcal{L}_p$

$\|f\|_p = 1$

$f_n \xrightarrow{unif} 0$

Vamos definir a medida ν_n da seguinte forma

$$\nu_n(A) = \int_A f_n \, d\lambda \qquad \lambda = \text{Lebesgue}$$

Esta família também não é equicontínua no $\emptyset$. Vejamos:

Ora se $B_k = [k, +\infty)$ então para $n \geq k$

$$\nu_n(B_k) = \int_{B_n} |f_n|^p \, d\lambda = \int_k^n \left(n^{-1/p}\right)^p d\lambda = \frac{1}{n}(n-k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Logo para n suf grande $\nu_n(B_k) \approx 1$.

Agora vamos provar o seguinte resultado que vai ser muito importante mais à frente. (Lema pag 178 Taylor)

Lema: Seja $(\nu_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família equi-contínua no ϕ e tq $\nu_\alpha \ll \mu$. Então $(\nu_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uniformemente absolutamente contínua.

Prova: Vamos fazer a prova por redução ao absurdo.
Suponhamos que $(\nu_\alpha)_{\alpha \in I}$ não é uniformemente absolutamente contínua, ie

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists B \text{ tq } \mu(B) \leq \delta \text{ e } \exists \alpha \text{ tq } \nu_\alpha(B) > \varepsilon.$$

Vamos agora fazer a escolha $\delta = \frac{1}{2^n}$. Então assumimos que

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta_n = \frac{1}{2^n} \quad \exists B_n \text{ tq } \mu(B_n) \leq \frac{1}{2^n} \text{ e } \exists \alpha_n \text{ tq}$$

$$\nu_{\alpha_n}(B_n) > \varepsilon.$$

Vamos provar que esta sequência não é equicontínua no ϕ. Seja $A_k = \bigcup_{n \geq k} B_n$. Ora $\mu(A_k) \leq \sum_{n \geq k} \mu(B_n)$

$$\leq \sum_{n \geq k} 1/2^n \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Observe que $A_j \downarrow \bigcap_{j\geq 1} \underbrace{\bigcup_{n\geq j} B_n}_{A_j} =: A$

$$\mu(A) \leq \mu(A_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \Longrightarrow \mu(A) = 0.$$

Como $\nu_\alpha \ll \mu$ então $\nu_\alpha(A) = 0 \quad \forall \alpha \in I$.

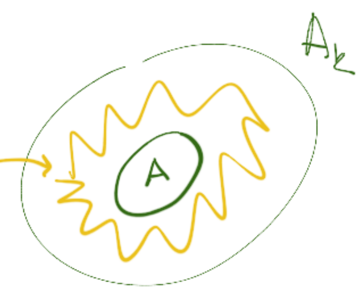
Por outro lado $(A_k \setminus A) \downarrow \phi$ (pois lembre que $A_k \downarrow A$).

Mas $\nu_\alpha(A_k \setminus A) = \nu_\alpha(A_k) - \nu_\alpha(A)$

$A \subseteq A_k$

$\nu_\alpha(A) = 0 < \infty$ $\qquad$ $\nu_\alpha(A) = 0.$

$$= \nu_\alpha(A_k)$$



E $A_k \supseteq B_k$ logo

$$\nu_\alpha(A_k \setminus A) = \nu_\alpha(A_k) \geq \nu_\alpha(B_k)$$

Agora vamos escolher $\alpha = \alpha_k$ como acima em ✡ ie para o qual $\nu_{\alpha_k}(B_k) > \varepsilon$.

Então temos $\nu_{\alpha_k}(A_k \setminus A) = \nu_{\alpha_k}(A_k) \geq \nu_{\alpha_k}(B_k) > \varepsilon$

Desta forma temos $A_k \setminus A \downarrow \phi$ mas não vale que

$$\sup_{\alpha \in I} \nu_\alpha(A_k \setminus A) \downarrow 0$$

pois acima temos $\nu_{\alpha_k}(B_k) \geq \varepsilon$, e portanto o supremo também é maior ou igual a ε. ∇! Absurdo.

Agora temos todos os ingredientes para provar o próximo resultado.

Teorema pag 178, ii) Taylor

$\{$ Convergência em medida $\Rightarrow$ convergência em $\mathcal{L}_p(\mu)\}$

Teorema: Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}_p(\mu)$ e defina para $A \in \mathcal{F}$ $\nu_n(A) = \int_A |f_n|^p \, d\mu$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ e assuma que $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua no ϕ, e que $\boxed{f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f}$ então $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}_p(\mu)} f$.

Prova: • obs: Lembremos que estamos sempre a assumir que μ é σ-finita. Então $\exists\, E_k \uparrow \Omega$ tal que $\mu(E_k) < \infty$ $\forall k$.

já vimos anteriormente que podemos sempre assumir que $E_k \uparrow$.

Ora $E_k^c \downarrow \phi$.

Como $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família equicontínua no ϕ então

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(E_k^c) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$\therefore$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, k_0$ (que depende de ε) tq $\forall k \geq k_0$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(E_k^c) \leq \varepsilon$

• Agora afirmamos que a sequência $(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_p(\mu)$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Queremos ver que $\exists n_0$ tq $\forall n, m \geq n_0$ tem-se que $\int |f_n - f_m|^p \, d\mu < \varepsilon$.

Vamos analisar $\int_{E_{k_0}^c} |f_n - f_m|^p \, d\mu$ onde $E_{k_0}^c$ é o conjunto que obtivemos acima para o que tínhamos.

obs

$$|f+g| \leq 2\max\{|f|,|g|\}$$

$$|f+g|^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\}$$

$$\leq 2^p \{|f|^p + |g|^p\}$$

$$\therefore \int |f+g|^p \, d\mu \leq 2^p \int |f|^p d\mu + 2^p \int |g|^p \, d\mu$$

Usando a observação acima, temos que

$$\int_{E_{k_0}^c} |f_n - f_m|^p d\mu \leq 2^p \underbrace{\int_{E_{k_0}^c} |f_n|^p d\mu}_{\substack{\text{por} \\ \text{def} \\ \| \\ \underbrace{\nu_n(E_{k_0}^c)}_{\leq \varepsilon}}} + 2^p \underbrace{\int_{E_{k_0}^c} |f_m|^p d\mu}_{\underbrace{\nu_m(E_{k_0}^c)}_{\leq \varepsilon}}$$

$\leq 2^{p+1} \varepsilon$ (este resultado vale para todo $n,m \geq 1$ já que $\sup_n \nu_n(E_{k_0}^c) \leq \varepsilon$)

Agora vamos analisar $\int_{E_{k_0}} |f_n - f_m|^p d\mu$!

Note que
$$\int_{E_{k_0}} |f_n - f_m|^p d\mu = \int_{E_{k_0} \cap \{|f_n - f_m|^p > \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\}} |f_n - f_m|^p d\mu$$

$$+ \underbrace{\int_{E_{k_0} \cap \{|f_n - f_m|^p \leq \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\}} |f_n - f_m|^p d\mu}_{\leq \frac{\varepsilon}{\cancel{\mu(E_{k_0})}} \cancel{\mu(E_{k_0})} = \varepsilon \ \forall n,m \geq 1}$$

lembre que $\mu(E_{k_0}) \leq \infty$

Falta estimar o integral acima ie $\boxed{\ast\ast}$

$$\int_{E_{k_0} \cap \{|f_n - f_m|^p > \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\}} |f_n - f_m|^p \, d\mu$$

$$\leq 2^p \left\{ \int_{E_{k_0} \cap \{|f_n - f_m|^p > \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\}} |f_n|^p \, d\mu + \int_{E_{k_0} \cap \{|f_n - f_m|^p > \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\}} |f_m|^p \, d\mu \right\}$$

$$\underset{\ast\ast\ast}{\leq} 2^p \nu_n\left(|f_n - f_m|^p > \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\right) + 2^p \nu_m\left(|f_n - f_m|^p > \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\right)$$

vamos estimar este termo, o outro é análogo.

Ora $\nu_n\left(|f_n - f_m|^p > \frac{\varepsilon}{\mu(E_{k_0})}\right)$

$$\leq \underbrace{\nu_n\left(|f_n - f|^p > \frac{\varepsilon}{2\mu(E_{k_0})}\right)}_{\ast} + \underbrace{\nu_n\left(|f_m - f|^p > \frac{\varepsilon}{2\mu(E_{k_0})}\right)}_{\ast\ast}$$

Agora vamos usar o lema que provamos acima ie:

Lema: Seja $(\nu_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família equi-contínua no $\emptyset$ e tq $\nu_\alpha \ll \mu$. Então $(\nu_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uniformemente absolutamente contínua.

Por definição de ν_n dada como o integral, já sabemos que $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz $\nu_n \ll \mu$. Por outro lado $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua no $\emptyset$. Então estamos nas condições do lema. Logo pelo lema $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$

é uniformemente absolutamente contínua.

Logo $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tq se $\mu(B) \leq \delta \Rightarrow \nu_K(B) \leq \varepsilon \ \forall K \geq 1$.

Como $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f$, então $\mu\{|f_n - f| > \delta\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\therefore \mu\left\{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(E_{K_0})}\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Logo dado $\delta > 0 \ \exists \ j_0$ tq $\forall n \geq j_0$

$$\mu\left\{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(E_{K_0})}\right\} \leq \delta$$

Então pelo Lema $\nu_K\left\{|f_n - f| \geq \dfrac{\varepsilon}{2\mu(E_{K_0})}\right\} \leq \varepsilon$, $\forall n \geq j_0$, $\forall K$.

Concluímos então que $\forall n, m \geq j_0$,

$$(*) \leq \varepsilon$$

$$(**) \leq \varepsilon$$

$$\therefore (***) \leq 2^p [2\varepsilon + 2\varepsilon] = 2^p \cdot 4\varepsilon = 2^{p+2}\varepsilon$$

isto vale $\forall n, m \geq j_0$.

Assim provamos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}_p(\mu)$. ✓

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}_p(\mu)$ e como $\mathcal{L}_p(\mu)$ é completo $\exists \ g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}_p(\mu)} g$.

Por outro lado sabemos que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f$.

Exercício: Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_p(\mu)$

então $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em medida. Além disso, se $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}p(\mu)} f$ então $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} f$. (ver o Teorema 7.4 do Taylor)

Usando o exercício acima também sabemos que

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu} g$$

e assim concluímos que $f = g$ q.c. E portanto $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}p(\mu)} f$. ✓

Como consequência temos o seguinte resultado.

Proposição: Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}p(\mu)$, tais que $\exists\ h \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tq $|f_n|^p \leq h$.
Então $\nu_n(E) = \int_E |f_n|^p \, d\mu$ é uma família equicontínua no ϕ.

Prova: Ora $\nu_n(E) = \int_E |f_n|^p \, d\mu \leq \int_E h \, d\mu := \nu_h(E)$

$\nu_h(\Omega) < \infty$ pois $h \in \mathcal{L}_1(\mu)$ ie h é integrável.
Então $\nu_h(\cdot)$ é uma medida finita e por isso é contínua por cima no ϕ. Seja então $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $B_j \downarrow \phi$. Ora

$$\nu_n(B_j) \leq \nu_h(B_j) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$$

$$\therefore \sup_n \nu_n(B_j) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$$ ✓

$\therefore (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua no ϕ.

Proposição: Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}p(\mu)$. Assuma que $\mu(\Omega)<\infty$ e que a sequência $|f_n|^p$ é uniformemente integrável ie

$$\sup_n \int_{|f_n|>A} |f_n|^p \, d\mu \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

Então ν_n é equicontínua no ϕ.

Prova: Seja $(B_k)_k$ tq $B_k \downarrow \phi$.

Então
$$\nu_n(B_k) = \int_{B_k} |f_n|^p \, d\mu$$
$$= \int_{B_k \cap \{|f_n|>A\}} |f_n|^p \, d\mu + \int_{B_k \cap \{|f_n|\leq A\}} |f_n|^p \, d\mu$$

$$✡ \leq \int_{|f_n|>A} |f_n|^p \, d\mu + A^p \mu(B_k)$$

Seja $\varepsilon>0$. Por hipótese $\exists A_0$ tq $\forall A \geq A_0$
$$\int_{|f_n|>A} |f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon \quad \forall n\geq 1$$

Então trocando em ✡ A por A_0 temos:
$$\nu_n(B_k) \leq \varepsilon + A_0^p \mu(B_k), \qquad \forall n \geq 1$$

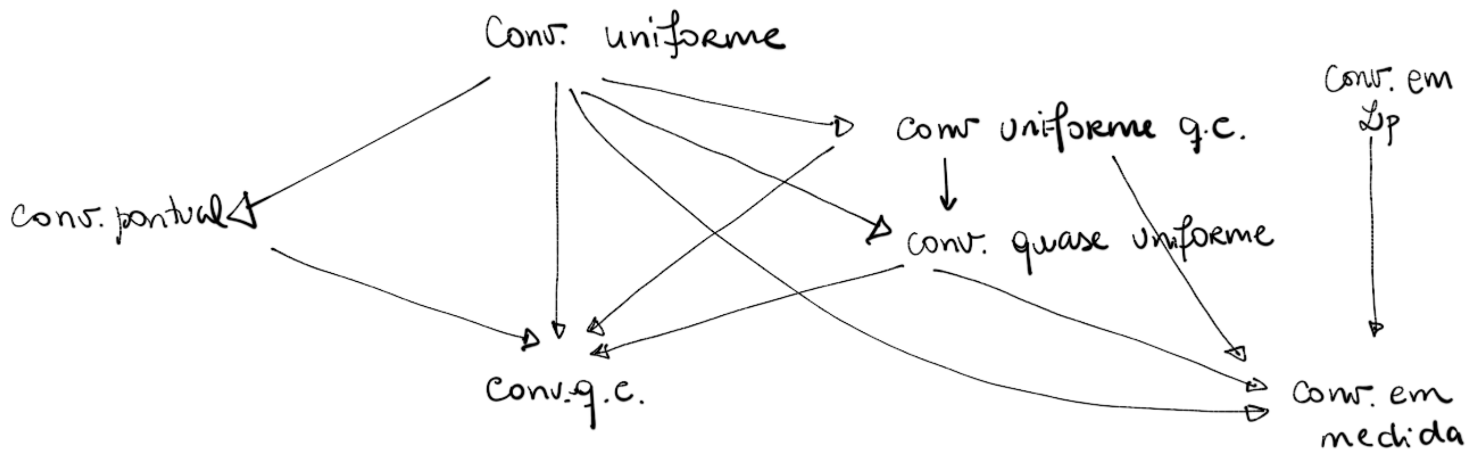
Como $\mu(\Omega)<\infty$, $B_k \downarrow \phi$ e μ é contínua por cima no ϕ

temos que $\mu(B_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$\therefore$ $\forall\ k \geq k_0$ vamos ter $\nu_n(B_k) \leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq 1$

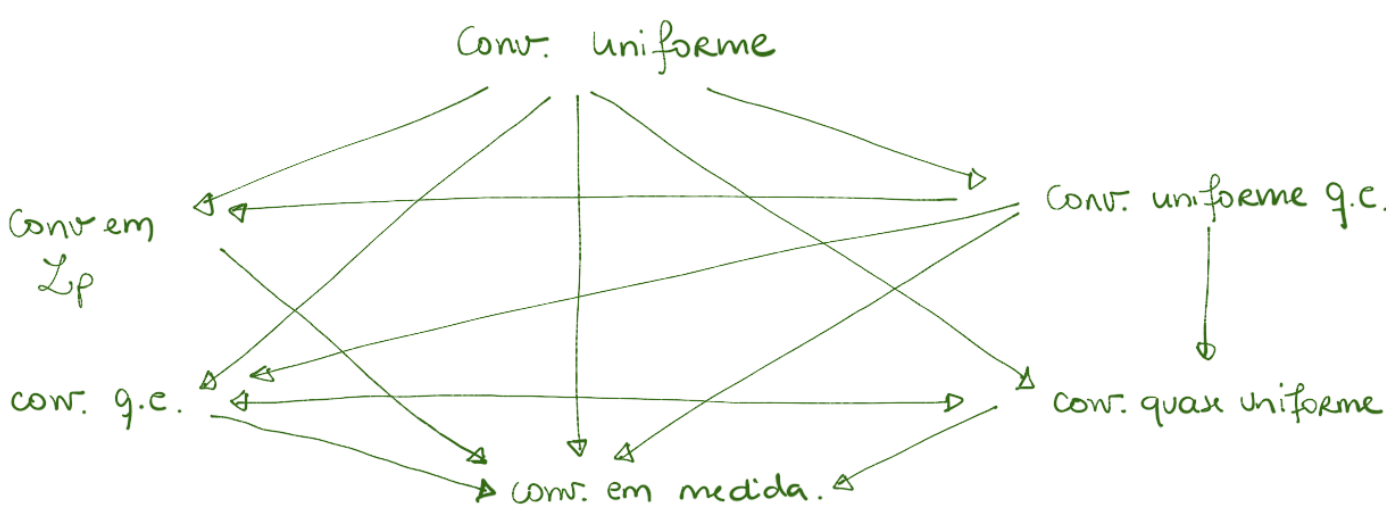
e isto prova que $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua no ϕ.

O que provámos pode assim ser resumido no seguinte esquema:



Exercício: complete em cada seta qual o resultado que está a ser usado para garantir que uma convergência implica a outra.

Quando $\mu(\Omega) < \infty$.



Exercício: Faça o esquema no caso em que

$|f_n|^p \leq h$ q.c. e $h \in \mathcal{L}_1(\mu)$.

FUNCIONAIS LINEARES

Aqui vamos assumir que o espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é σ-finito e $\mathcal{F}$ é completa com respeito a μ.

Já vimos anteriormente que se $p \geq 1$ $\mathcal{L}_p(\mu)$ era um espaço métrico completo com a métrica

$$\rho_p(f,g) = \left[\int |f-g|^p d\mu\right]^{1/p} \qquad 1 \leq p < +\infty$$

e $\mathcal{L}_\infty$ com a métrica $\rho_\infty(f,g) = \text{ess sup } |f-g|$

Também vimos que eram espaços lineares (sobre os reais) e a métrica define uma norma

$$\|f\|_p = \rho_p(f,g).$$

Logo

$$(*) \begin{cases} \|f\|_p > 0 \quad \text{se } f \neq 0, \quad \|0\| = 0 \\ \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{Minkowski}) \\ \|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O nosso objetivo agora consiste em analisar estes espaços $\mathcal{L}_p$. Para tal vamos definir transformações lineares.

Considere B um espaço linear sobre os reais ie

se $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in B$ então $\alpha f + g \in B$

e assuma que temos uma norma em B e que satisfaz as propriedades em ⊛, ie

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$$
$$\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$$
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Como exemplo pensemos em $B = \mathcal{L}_p(\mu)$ e $\|f\| = \|f\|_p$.

Def: Uma transformação linear é uma aplicação

$$T : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$.

Exemplo $B = \mathcal{L}_p(\mu)$

Seja $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ com $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$.

Podemos definir

$$T_g : \mathcal{L}_p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow \int fg \, d\mu$$

Observe que 1) T_g é uma transformação linear (verifique)

2) $T_g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ como consequência da desigualdade de Hölder

Vamos agora definir a norma da transformação linear $\|T\|$ ie:

Definição: T é limitada se $\exists K < \infty$ tq $|Tf| \leq K \|f\|$ $\forall f \in B$.

A norma de T vai ser igual à menor constante que satisfaz a desigualdade acima.

Obs B é um espaço linear, logo existe um elemento neutro que deno tamos por $0_{//}$.

Ora $T(0) = 0$ pois $T(0) = T(f-f) = T(f) - T(f) = 0$.

$\therefore$ se $f = 0$, $|T(f)| = 0$.

Então definimos
$$\boxed{\|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|T(f)|}{\|f\|}}$$

observe que $\|T\| \leq K$ (ver a definição acima)

$\therefore$ se T é uma transformação linear limitada, $\|T\| < \infty$.

Também observe que $\|T\| \geq \dfrac{|T(g)|}{\|g\|} \quad \forall g \in B$

$$\Longrightarrow |T(g)| \leq \|T\| \, \|g\|$$

$\therefore$ $\|T\|$ é a menor constante para a qual vale $|T(f)| \leq K\|f\|$.

Observe também que $\|T\| = \sup_{f \neq 0} \dfrac{|T(f)|}{\|f\|}$

$$= \sup_{f \neq 0} \left| \frac{1}{\|f\|} T(f) \right| = \sup_{f \neq 0} \left| T\left(\frac{f}{\|f\|} \right) \right|$$

Logo $\|T\| = \sup_{g \in B : \|g\| = 1} |T(g)|$

$\circledast$ Se T_1 e T_2 são duas transformações lineares então $\alpha T_1 + \beta T_2$ também é uma transformação linear logo o espaço das transformações lineares é um espaço linear.

Agora vamos analisar operadores (ou transformações) lineares em $\mathcal{L}_p(\mu)$, para $1 < p < +\infty$. (Para $p = 1$ os argumentos vão ser ligeiramente diferentes).

Já vimos que se $\left.\begin{array}{l} g \in \mathcal{L}_q \\ \text{e } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \end{array}\right\}$ então $T_g : \mathcal{L}_p \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longrightarrow \int fg \, d\mu$ então T_g é um operador linear.

<u>Afirmação</u>: $\|T_g\| = \|g\|_q$.

<u>Prova</u>:

Observa que $|T_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$, pois pela desigualdade de Hölder temos que $|T_g(f)| = \left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Então $\|T_g\| \leq \|g\|_q$.

Por outro lado $\|T_g\| = \|g\|_q$. Para provarmos esta igualdade precisamos de encontrar uma função f que realize o supremo,

$$\|T_g\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|T_g(f)|}{\|f\|_p}$$

Se encontrarmos f tq $|T_g(f)| \overset{\circledast}{=} \|f\|_p \|g\|_q$ com $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ então $\|T_g\| \geq \|g\|_q$ e iremos obter a igualdade.

Vamos encontrar a tal função $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ para a qual vale $\circledast$.

Lembre que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Seja $\tilde{f} = \text{sinal}(g)\, |g|^{q/p}$. Ora $|\tilde{f}|^p = |g|^q$

$\therefore \int |\tilde{f}|^p \, d\mu = \int |g|^q \, d\mu < \infty$

$\therefore \tilde{f} \in \mathcal{L}_p(\mu)$

Ora $|T_g(\tilde{f})| = \int \underbrace{g \, \text{sinal}(g)}_{= |g|} |g|^{q/p} \, d\mu$

$= \int |g|^{\frac{q}{p}+1} \, d\mu$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{q} \iff q = \frac{p}{p-1}$

$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \iff \frac{p}{q} = p-1$

$\therefore 1 + \frac{q}{p} = \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{1+p-1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$

$= \int |g|^q \, d\mu$

$= \|g\|_q^q$

Observa que $\|g\|_q^q = \|\tilde{f}\|_p^p$

Então $|T_g(\tilde{f})| = \|g\|_q^q = \frac{\|g\|_q^q \cdot \|\tilde{f}\|_p}{\|\tilde{f}\|_p}$

$= \|g\|_q^{q - \frac{q}{p}} \cdot \|\tilde{f}\|_p$

$= \|g\|_q \, \|\tilde{f}\|_p$. que era o que queríamos.

mais simples

obs $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\frac{q}{p} + 1 = q$

Acabamos de provar o seguinte resultado.

Lema: Seja $p \in (1, +\infty)$, p e q conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$.

Então se $T_g : \mathcal{L}_p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T_g(f) = \int f g \, d\mu$

tem-se que:

(1) T_g é um operador linear limitado

(2) $\|T_g\| = \|g\|_q$

Vamos analisar o reverso i.e suponhamos que $T: \mathcal{L}_p(\mu) \to \mathbb{R}$ é um operador linear limitado. Será que existe $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ tal que $T = T_g$? Sim, e isso é verdade, i.e todos os operadores lineares limitados em $\mathcal{L}_p(\mu)$ são da forma T_g para alguma $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$.

(ver o teorema 8.7 do Taylor)

Teorema: Seja $1 < p < +\infty$, $T: \mathcal{L}_p(\mu) \to \mathbb{R}$ um operador linear e limitado. Então $\exists\, g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tal que

obs: este resultado também vale para $p = 1$

$$T(f) = \int fg \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mu).$$

(*) este teorema caracteriza os operadores lineares e limitados em $\mathcal{L}_p(\mu)$.

Prova: Vamos supôr que $\mu(\Omega) < \infty$. Vamos construir a função g usando o teorema de Radon-Nikodym. Para tal vamos definir

$$\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

dada em $A \in \mathcal{F}$ por $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$.

Vamos provar que ν é uma medida com sinal e $\nu \ll \mu$.

$\boxed{1}$ ν é σ-aditiva

Vamos começar por ver que ν é aditiva. Sejam $A_j \in \mathcal{F}$.

Ora $\nu\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = T\left(\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} A_j}\right) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} T(\mathbb{1}_{A_j})$

os conj são disjuntos

$= \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j)$

$\therefore$ ν é aditiva.

Agora vamos provar que ν é σ-aditiva. Sejam $A_j \in \mathcal{F}$. Queremos provar que

$$\nu\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$$

Vamos analisar $\left|\nu\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) - \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j)\right| = \Theta$

// já vimos antes

Ora $\Theta = \left|T\left(\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{\infty} A_j}\right) - T\left(\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} A_j}\right)\right|$

$= \left|T\left(\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{\infty} A_j} - \mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} A_j}\right)\right|$ T é linear

$= \left|T\left(\mathbb{1}_{\sum_{j>n} A_j}\right)\right|$

$\leq k \left\|\mathbb{1}_{\sum_{j>n} A_j}\right\|_p$ porque T é um operador limitado e definido em $\mathcal{L}p(\mu)$.

Agora note que $\left\|\mathbb{1}_{\sum_{j>n} A_j}\right\|_p = \left\{\int \left|\mathbb{1}_{\sum_{j>n} A_j}\right|^p d\mu\right\}^{1/p}$

pela definição de $\mathbb{1}_{(\cdot)}$

$= \left\{\int \mathbb{1}_{\sum_{j>n} A_j} d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}$

$= \left[\mu\left(\sum_{j>n} A_j\right)\right]^{\frac{1}{p}}$

Ora $\sum_{j>n} A_j \downarrow \phi$ e como μ é finita, então

$$\mu\left(\sum_{j>n} A_j\right) \longrightarrow 0$$

$\therefore$ ν é σ-aditiva ✓

$\boxed{2}$ ν é σ-finita, na verdade ν é finita!

Ora $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$ donde vem que

$$\begin{aligned} |\nu(A)| &= |T(\mathbb{1}_A)| \\ &\leq k\,\|\mathbb{1}_A\|_p \\ &= k\left\{\int |\mathbb{1}_A|^p d\mu\right\}^{1/p} \\ &= k\left[\mu(A)\right]^{1/p} \end{aligned} \quad ✡$$

Pela decomposição de Hahn-Jordan sabemos que existem $P \in \mathcal{F}$ e $N \in \mathcal{F}$, tal que $P \cap N = \phi$, $P \cup N = \Omega$ e se

$$A \subseteq P \quad \nu(A) \geq 0$$

$$B \subseteq N \quad \nu(B) \leq 0.$$

P é o chamado conjunto positivo e N o conjunto negativo.

Se em ✡ tomamos $B \subseteq N$ temos

$$|\nu(B)| \leq k\left[\mu(B)\right]^{1/p} \leq k\left[\mu(N)\right]^{1/p} < \infty$$

e se $A \subseteq P$ temos

$$|\nu(A)| \leq k\left[\mu(A)\right]^{1/p} \leq k\left[\mu(P)\right]^{1/p} < \infty$$

Como $\nu = \nu_+ - \nu_-$ e pelo que acabamos de ver a parte positiva ν_+ e a parte negativa ν_- são medidas finitas. Logo

ν é uma medida com sinal finita.

3 $\quad \nu \ll \mu$.

Se $A \in \mathcal{F}$ e $\mu(A) = 0$, então pelas desigualdades acima temos que $|\nu(A)| = 0$ (veja ✡).

Estamos nas condições do teorema de Radon-Nikodym ie

- ν medida c/ sinal ✓
- ν finita ✓
- $\nu \ll \mu$ ✓

Logo $\exists\, g$ tal que $\nu(A) = \int g \, d\mu$. Esta é a função g que estávamos à procura. Note que g é μ-integrável.

Vamos agora provar os seguintes resultados

(a) $T(f) = \int gf \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mu)$

(b) $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$

Provemos (a).

Note que $T(\mathbb{1}_A) = \nu(A) = \int_A g \, d\mu = \int g \mathbb{1}_A \, d\mu$

logo (a) vale para $f = \mathbb{1}_A$. Observa que $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}_p(\mu)$ pois

$$\int |\mathbb{1}_A|^p \, d\mu = \int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A) < \infty \text{ pois } \mu(\Omega) < \infty.$$

Agora vamos estender.

(i) Seja f uma função simples, $f \in \mathcal{L}p(\mu)$.

Então $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{A_j}$ e $T(f) = T\left(\sum_j c_j \mathbb{1}_{A_j}\right) = \sum_j c_j T(\mathbb{1}_{A_j})$

$$= \sum_j c_j \int g \mathbb{1}_{A_j} \, d\mu$$

$$= \int \sum_j c_j \mathbb{1}_{A_j} g \, d\mu$$

$$= \int f g \, d\mu \checkmark$$

(ii) Seja $f \in \mathcal{L}p(\mu)$, $f \geq 0$.

Ora $\exists (f_n)_n$, $f_n \uparrow f$ e f_n simples, $f_n \geq 0$. Observa que

$\int |f_n|^p \, d\mu \leq \int |f|^p \, d\mu < \infty \therefore f_n \in \mathcal{L}p(\mu) \; \forall n$.

$\therefore$ f_n são funções simples, positivas e em $\mathcal{L}p(\mu)$.

- Observe que podemos escrever $g = g_+ - g_-$.

  Afirmamos que $\int f g_+ \, d\mu < \infty$.

Ora como $f \in \mathcal{L}p(\mu)$, $f \geq 0$ $\exists f_n \uparrow f$, f_n simples, $f_n \geq 0$ e $f_n \in \mathcal{L}p(\mu)$.

Então se $A = \{x : g(x) \geq 0\}$ temos $f_n \mathbb{1}_A \uparrow f \mathbb{1}_A$

Logo

pelo que já vimos acima

$$\underbrace{T(f_n \mathbb{1}_A)}_{\text{é uma função simples}} = \int f_n \mathbb{1}_A \, g \, d\mu = \int f_n g_+ \, d\mu$$

$$\downarrow \text{TCM}$$

$$\int f g_+ \, d\mu$$

Por outro lado

$$\lim_{n\to+\infty} T(f_n \mathbb{1}_A) \underset{\text{prova}}{=\!=} T(f\mathbb{1}_A) \,!$$

Para provar a igualdade acima, note que

$$|T(f_n\mathbb{1}_A) - T(f\mathbb{1}_A)| \underset{\substack{\text{lineari-}\\\text{dade}\\\text{de } T}}{=\!=} |T((f_n-f)\mathbb{1}_A)|$$

$$\leq k\,\|(f_n-f)\mathbb{1}_A\|_p$$

$$= k\left[\int |f_n-f|^p\,d\mu\right]^{1/p}$$

Agora nota que $|f_n-f|^p \leq 2^p(|f_n|^p+|f|^p) \leq 2^p(2|f|^p)$ integrável

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ pontualmente

Logo pelo TCD $\displaystyle\int |f_n-f|^p\,d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ate' aqui provamos que $T(f\mathbb{1}_A) = \int fg^+\,d\mu$ e além disso,

$$\underset{\substack{\uparrow\\\text{porque } T \text{ e' limitado!}}}{\infty >} T(f\mathbb{1}_A) = \int f g_+\,d\mu$$

Isto mostra que se $f\geq 0$, $f\in\mathcal{L}p(\mu)$ então

$$\int f g_+\,d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int f g_-\,d\mu < \infty \qquad \text{(I)}$$

Estamos de volta a $\boxed{\triangle}$ ie à nossa extensão. Seja $f\geq 0$, $f\in\mathcal{L}p(\mu)$, logo

$\exists\, f_n \uparrow f$ $\quad f_n$ simples. Pelo que já provamos acima, sabemos que

$$T(f_n) = \int f_n g \, d\mu$$

$g = g_+ - g_-$ e linearidade do integral

$$= \int f_n g_+ \, d\mu - \int f_n g_- \, d\mu$$

$$\Big\downarrow \text{TCM} \qquad\qquad \Big\downarrow \text{TCM}$$

$$\underbrace{\underbrace{\int f g_+ \, d\mu}_{<\infty} - \underbrace{\int f g_- \, d\mu}_{<\infty}}$$ por (I)

$$= \int f(g_+ - g_-) \, d\mu = \int f g \, d\mu$$

$$\therefore \quad T(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int f g \, d\mu$$

Novamente pela linearidade de T temos

$$|T(f_n) - T(f)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearidade de } T}}{=} |T(f_n - f)| \leq k \, \underset{\substack{\| \\ \left[\int |f_n - f|^p \, d\mu\right]^{1/p}}}{\|f_n - f\|_p}$$

mas novamente note que $\quad |f_n - f|^p \leq 2^p \left(|f_n|^p + |f|^p\right)$

$$\leq \underbrace{2^p \left(2|f|^p\right)}_{\substack{\mu\text{- integrável porque} \\ f \in \mathcal{L}^p(\mu)}}$$

e além disso $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$. Logo pelo TCD temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = \int \underbrace{\lim_n |f_n - f|^p}_{=0} \, d\mu$$

$$\therefore \quad T(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(f)$$

Daqui resulta que $T(f) \underset{\boxed{*}}{=} \int f g \, d\mu$

$\boxed{*}$ Até aqui provamos a igualdade $\boxed{*}$ vale para $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, $f \geq 0$.
Falta agora retirar a hipótese $f \geq 0$.

Seja então $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$. Ora $f = f_+ - f_-$

$$f_+, f_- \in \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$T(f) = T(f_+ - f_-) \underset{\substack{\text{lineari-}\\\text{dade}\\\text{de } T}}{=} T(f_+) - T(f_-)$$

$$= \int f_+ g \, d\mu - \int f_- g \, d\mu$$

como fizemos atrás podemos verificar que $\int f_+ g \, d\mu < \infty$ e $\int f_- g \, d\mu < \infty$

$$= \int (f_+ - f_-) g \, d\mu = \int f g \, d\mu.$$

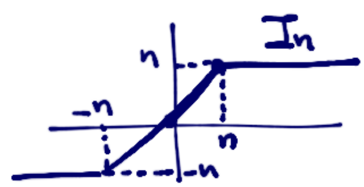
$$\therefore \quad \boxed{T(f) = \int g f \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mu)}$$

g é a derivada de Radon-Nikodym.

Agora falta provar que a função $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$.

Seja $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \begin{cases} n & \text{se } x > n \\ x & \text{se } x \in [-n, n] \\ -n & \text{se } x < -n \end{cases}$$



e seja $f_n = \text{sinal}(g)\, |F_n(g)|^{q/p}$.

$f_n \in \mathcal{L}p(\mu)$ porque $|F_n(g)| \leq n$; sinal $(g) \leq 1$ e

como μ é finita e f_n é limitada, $f_n \in \mathcal{L}p(\mu)$.

Logo $|T(f_n)| \leq K \|f_n\|_p$. Mas $T(f_n) = \int f_n\, g\, d\mu$

$$= \int \underbrace{\text{sinal}(g) \cdot g}_{= |g|} \cdot |F_n(g)|^{q/p}\, d\mu$$

$$\therefore \left| \int |g|\, |F_n(g)|^{q/p}\, d\mu \right| \leq K \left(\int |F_n(g)|^q d\mu \right)^{1/p}$$

Ora $|F_n(g)| \leq |g|$ ✓

Nota que $\left(\int |F_n(g)|^q\, d\mu \right)^{1/p} = \left(\int |F_n(g)|^{q-1} \cdot \underbrace{|F_n(g)|}_{\leq |g|}\, d\mu \right)^{1/p}$

Ora $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff 1 + \frac{q}{p} = q$ e a expressão acima fica

$$\int |g|\, |F_n(g)|^{q-1}\, d\mu$$

Pondo tudo junto temos

$$\int |g|\, |F_n(g)|^{q-1}\, d\mu \leq K \left(\int |F_n(g)|^{q-1} |g|\, d\mu \right)^{1/p}$$

$$\therefore \left(\int |g|\, |F_n(g)|^{q-1}\, d\mu \right)^{1-1/p} \leq K$$

Note que $K = \|T\|$.

Concluindo, temos $\left(\int |g|\,|F_n(g)|^{q-1}\,d\mu\right)^{1/q} \leq \|T\|$

$$\Big\downarrow \text{TCM}$$

$$\|g\|_q = \left(\int |g|^{1+q-1}\,d\mu\right)^{1/q} \leq \|T\|$$

$$\therefore\ g \in \mathcal{L}_q(\mu) \quad e \quad \|g\|_q = \|T\|.$$

Agora precisamos de retirar a hipótese $\mu(\Omega) < \infty$ 8.

Suponhamos então que μ é σ-finito ie $\Omega = \sum_{j \geq 1} E_j$ com $\mu(E_j) < \infty$.

Vamos fixar o conjunto E_j e vamos considerar μ restrita a E_j ie estamos a considerar o espaço de medida

$$(E_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$$

para $B \in \mathcal{F}_j$, $\mu_j(B) = \mu(B \cap E_j)$ e μ_j é finita, onde a σ-álgebra $\mathcal{F}_j$ é chamada de traço e define-se por:

$$\mathcal{F}_j = \{ A \cap E_j \ ; \ A \in \mathcal{F} \}.$$

Pelo que provamos antes, existe g_j tal que

$$g_j(x) = 0 \text{ se } x \notin E_j$$

$$e \quad T(\underbrace{f\,\mathbb{1}_{E_j}}_{\text{tem de ser uma função definida em } E_j}) = \int \mathbb{1}_{E_j}\, f\, g_j\, d\mu = \int f\, g_j\, d\mu$$

porque $g_j = 0$ em E_j^c

Agora definimos $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \mathbb{1}_{E_j}$. A expressão atrás fica

$$T(f\mathbb{1}_{E_j}) = \int_{E_j} fg\,d\mu = \int f\mathbb{1}_{E_j}\, g\,d\mu.$$

Até aqui sabemos que vale $\boxed{T(f) = \int fg\,d\mu}$ apenas para funções f da forma $f\mathbb{1}_{E_j}$ com $f \in \mathcal{L}p(\mu)$ e $E_j \in \mathcal{F}$ com $\mu(E_j) < \infty$.

Agora observe que $T\left(f\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j}\right) = \int f\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j}\, g\,d\mu$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Seja $f \geq 0$, $f \in \mathcal{L}p(\mu)$.

Então $\boxed{\int f g_+ d\mu < \infty.}$

Provemos este resultado. Seja $A = \{g \geq 0\}$.

Então $T(\underbrace{f\mathbb{1}_A}_{\in\,\mathcal{L}p(\mu)}\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j}) = \int f\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j}\underbrace{\mathbb{1}_A\, g}_{g_+}\,d\mu$

$$= \int f\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j}\, g_+\,d\mu$$

$$\Big\downarrow \text{ TCM como } \sum_{j=1}^{n} E_j \uparrow \Omega$$

$$\int f g_+\,d\mu$$

Por outro lado $\left|T(f\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j})\right| = \left|T(f\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j \cap A})\right|$

$$\leq K \left\|f\mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j \cap A}\right\|_p^p$$

$$\leq K\|f\|_p < \infty \text{ porque } f \in \mathcal{L}p(\mu)$$

Ora $$T\left(f \mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j \cap A}\right) = \int \mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j} f g_+ \, d\mu$$

observe que $g \leq 0$ então $g_- = -g$

e se $B = \{g \leq 0\}$ então seguindo os mesmos argumentos que usamos acima temos $$T\left(f \mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j \cap B}\right) = \int - \mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j} f g_- \, d\mu$$

Por outro lado $$\left| T\left(f \mathbb{1}_{\sum_{j=1}^{n} E_j \cap A}\right) - T(f \mathbb{1}_A) \right|$$

$$= \left| T\left(f \left(\mathbb{1}_{\sum_{j>n} E_j \cap A}\right)\right) \right| \leq K \, \underbrace{\| f \mathbb{1}_{\sum_{j>n} E_j \cap A} \|_p^p}_{\leq f \in \mathcal{L}p(\mu)}$$

e pelo TCD $$\| f \mathbb{1}_{\sum_{j>n} E_j \cap A} \|_p^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Assim provámos que

$$T(f \mathbb{1}_A) = \int f g_+ \, d\mu$$
$$T(f \mathbb{1}_B) = -\int f g_- \, d\mu$$

$$\therefore \; T(f) = T(f(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)) = T(f \mathbb{1}_A) + T(f \mathbb{1}_B)$$
$$= \int f g_+ \, d\mu - \int f g_- \, d\mu$$
$$= \int f (g_+ - g_-) \, d\mu = \int f g \, d\mu.$$

Até aqui provamos a identidade $T(f) = \int fg \, d\mu$ para $f \geq 0$, $f \in \mathcal{L}p(\mu)$. Falta estender para $f \in \mathcal{L}p(\mu)$. Mas é só repetir a mesma prova que fizemos antes.

Para provar que $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ é só repetir a prova que fizemos anteriormente.

Observe que no teorema acima consideramos $1 < p < +\infty$, mas de facto quando $p = 1$ o resultado também vale ie.

Teorema: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ σ-finito. Se $g \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ então $T(f) = \int fg \, d\mu$ é um operador linear em $\mathcal{L}_1(\mu)$. Dado qualquer funcional linear limitado T em $\mathcal{L}_1(\mu)$, $\exists$ $g \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ t.q. $T(f) = \int fg \, d\mu$, e neste caso $\|T\| = \text{ess sup } |g|$

Exercício: adapte a prova dada no caso $1 < p < +\infty$ para este caso.

Exercício: Mostre que um operador linear T definido num espaço linear normado é contínuo sse é limitado.

A noção de um operador $T: K \to \mathbb{R}$ ser contínuo em $\eta \in K$ significa que dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tg $\|\xi - \eta\| < \delta \Rightarrow |T(\xi) - T(\eta)| < \varepsilon$.

Definição: Um espaço linear normado (sobre os reais) que é completo com respeito à topologia induzida pela norma diz-se um espaço de Banach.

Exemplo: • $\mathcal{L}_p(\mu)$ $1 \leq p \leq +\infty$ é um espaço linear normado e com pleto, logo $\mathcal{L}_p(\mu)$ é um espaço de Banach.

- $\mathbb{R}^n$, com a métrica usual é um espaço de Banach
- $C[a,b]$ = espaço das funções contínuas $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ com $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ é um espaço de Banach.

PRODUTO INTERNO: Para um espaço linear normado K uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : K \times K \to \mathbb{R}$ diz-se um produto interno (ou produto escalar) se:

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
2. $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$
3. $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$

Obs no espaço $\mathcal{L}_2(\mu)$ podemos definir

$$\langle f, g \rangle_0 = \int fg \, d\mu$$

Pela desigualdade de Hölder $\int |fg| \, d\mu \leq \underbrace{\|f\|_2}_{<\infty} \underbrace{\|g\|_2}_{<\infty} < \infty$

Exercício: Verifique que $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ é um produto interno.

Definição: Suponha que H é um espaço linear normado com um produto interno que é completo com respeito à topologia induzida pela norma, então neste caso H diz-se um espaço de HILBERT.

Observe que qualquer espaço de Banach será de Hilbert se existir um produto interno tal que $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

A questão que temos de fazer agora é se todos os espaços de Banach são espaços de Hilbert ou não? Para tal precisamos de verificar se existe tal produto interno. Ora se existe, então

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \underset{\langle f,g\rangle}{\underset{\shortparallel}{\langle g,f\rangle}} + \langle g,g\rangle$$

$$= \|f\|^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2$$

$$\|f-g\|^2 = \ \cdots \cdots \qquad = \|f\|^2 - 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2$$

$$\therefore \quad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2. \quad ✡$$

A relação ✡ é necessária para que num espaço de Banach haja um produto interno. Por outro lado, se vale ✡, então

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2}\left\{ \|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2 \right\} \quad ✡✡.$$

satisfaz as condições de produto interno, logo qualquer espaço de Banach que satisfaz ✡ é um espaço de Hilbert definindo o produto interno como em ✡✡.

Obs: É possível provar que $\mathcal{L}p(\mu)$ não é um espaço de Hilbert se $p \neq 2$.

Ex: Seja K^* o conjunto dos funcionais lineares limitados definidos num espaço linear normado K. Mostre que K^* é um espaço de

Banach.

Definição : Para qualquer espaço linear normado K, o espaço de Banach K^* é chamado de espaço conjugado de K (ou espaço dual).

Pelo que vimos acima o espaço dual de $\mathcal{L}p$ ie $\mathcal{L}p^* = \mathcal{L}q$ onde $1/p + 1/q = 1$.

Agora vamos discutir a diferenciação de medidas.

Integral de Lebesgue

Já vimos como definir o integral de funções definidas em espaços abstratos como $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Vamos agora analisar $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ $\quad \mu =$ Lebesgue

$\mathcal{L} =$ σ-alg. de Lebesgue $=$ conj. mensuráveis

Seja $E \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}$ usamos a notação

$$\int_E f(x)\,dx \quad \text{para} \quad \int_E f\,d\mu.$$

Observa que se E for um intervalo vamos usar a notação

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{para} \quad \int_E f\,d\mu \quad \text{com } E = [a,b],\ (a,b),\ [a,b),\ (a,b]$$

Não há diferença nenhuma já que a medida de Lebesgue de um ponto é nula. Também podemos ter $a = -\infty$ e $b = +\infty$.

Obs Para a medida de Lebesgue - Stieltjes podemos fazer a mesma definição que acima, mas agora temos de ter cuidado quando integramos em $[a,b]$ ou $(a,b]$ ou $[a,b)$ ou (a,b) pois não sabemos se F é contínua em a ou b.

Como $\mathcal{L}$ é completo com respeito à medida de Lebesgue, então se $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ é integrável e $f = g$ q.c. então

$g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ também é integrável.

Obs 1 Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona crescente de funções não negativas e $f_n \in \mathcal{L}_0$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ e se

$$f = \lim_n f_n$$

então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Como consequência da observação anterior, temos que se $\{f_n\}_n$ é uma sequência de funções não negativas e Lebesgue mensuráveis e $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

Obs Se g é integrável com respeito à medida de Lebesgue e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n \in \mathcal{L}_0$ com

$$f_n \to f \quad \text{q.c.}$$

e $|f_n| \leq g$ para cada n, então f_n, f são integráveis com respeito à medida de Lebesgue e

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

CONDIÇÕES PARA A INTEGRABILIDADE

Vamos comparar aqui o integral de Lebesgue e o integral de Riemann

$\mathcal{L} \int_a^b f(x)\,dx$ denota o integral de Lebesgue

$\mathcal{R} \int_a^b f(x)\,dx$ " " " " Riemann

Vamos ver agora o seguinte exemplo:

$\rightarrow$ $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ esta função é descontínua em todo o ponto de $\mathbb{R}$

Para $a < b$ o integral de Riemann $\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx$ não existe.

No entanto, o conjunto dos racionais ie $\mathbb{Q}$ é numerável, e $\mu(\mathbb{Q}) = 0$, logo $f \in \mathcal{L}$ e f é simples.
Além disso $\mathcal{L}\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(\mathbb{Q} \cap (a,b)) = 0$.

Função de Dirichlet

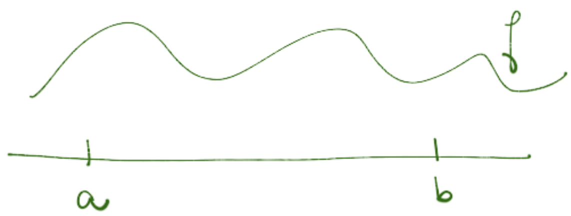
O exemplo acima diz-nos que integrar com respeito a Lebesgue é mais geral do que integrar no sentido de Riemann.

O próximo resultado diz-nos quando é que uma função é integrável no sentido de Riemann e no sentido de Lebesgue. Há casos bastante patológicos, mas não vamos abordá-los aqui.

TEOREMA: Uma função $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ é integrável à la Riemann sse o conjunto de pontos E em $[a,b]$ onde f é descontínua satisfaz $|E|=0$.

Qualquer função $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ que é integrável à la Riemann é integrável à la Lebesgue com o mesmo valor do integral.

Prova:



Dividimos $I_0=(a,b]$ em 2^n intervalos $I_{n,i}=(a_{n,i-1},a_{n,i}]$ para $i=1,2,\dots 2^n$.

Seja
$$m_{n,i}=\inf\{f(x);\ x\in I_{n,i}\}$$
$$M_{n,i}=\sup\{f(x);\ x\in I_{n,i}\}$$

$$g_n(x)=\begin{cases} m_{n,i} & \text{se } x\in I_{n,i}\\ 0 & \text{se } x\notin I_0\end{cases} \qquad h_n(x)=\begin{cases} M_{n,i} & \text{se } x\in I_{n,i}\\ 0 & \text{se } x\notin I_0\end{cases}$$

Para cada $x\in I_0$ temos $x\in I_{n,i}$ para algum i e nesse caso
$$g_n(x)\leq f(x)\leq h_n(x)$$

$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona $\uparrow$ de funções simples

$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona $\downarrow$ de funções simples.

Se $g = \lim_n g_n$ e $h = \lim_n h_n$ temos:

$$g \leq f \leq h \quad \text{logo}$$

$$\mathcal{L}\int_a^b g(x)\,dx = \lim_n \mathcal{L}\int_a^b g_n(x)dx$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{2^n} m_{n,i}\, \underbrace{|I_{n,i}|}_{= \frac{b-a}{2^n}} = \lim_n s_n$$

$$\mathcal{L}\int_a^b h(x)\,dx = \lim_n \mathcal{L}\int_a^b h_n(x)dx$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{2^n} M_{n,i}\, \frac{b-a}{2^n} = \lim_n S_n$$

Dizemos que f é integrável à la Riemann em $[a,b]$ sse

$$\lim_n s_n = \lim_n S_n = I \quad \text{e} \quad \mathcal{R}\int_a^b f(x)dx = I.$$

Agora note que se f é contínua em $x \in (a,b)$ então $g(x) = h(x)$. Reciprocamente, se $g(x) = h(x)$ e x não é um ponto extremo dos intervalos $I_{n,i}$ (vamos chamar a este conjunto de pontos D.) então f é contínua em x.

Se $\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx$ existe, como $g \leq f \leq h$ temos

$$\mathcal{L}\int_a^b g(x)\,dx = \mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{L}\int_a^b h(x)\,dx$$

e portanto $\mathcal{L}\int_a^b g-h\,dx=0 \Rightarrow g=h$ q.c.

Como o conjunto de pontos E onde f é descontínua está contido em $D\cup\{x: g(x)\neq h(x)\}$ então

$$|E|\leq |\{x: g(x)\neq h(x)\}|=0$$

$$\therefore |E|=0$$

Como a medida de Lebesgue é completa, $f\in\mathcal{L}$ e

$$\mathcal{L}\int_a^b f(x)\,dx=\mathcal{L}\int_a^b g(x)\,dx=\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx$$

Reciprocamente se $|E|=0$ então $g(x)=h(x)$ q.c.

$$\therefore \mathcal{L}\int_a^b g(x)\,dx=\mathcal{L}\int_a^b h(x)\,dx$$

$\therefore$ f é integravel à la Riemann. ✓

O Resultado anterior diz-nos que para uma função ser integravel no sentido de Riemann então f não pode ter "muitos" pontos de descontinuidade.

<u>Obs</u>: Há varios exemplos de funções que não são contínuas em nenhum ponto.

O proximo resultado diz-nos que as funções Lebesgue integráveis são aproximadas, num certo sentido, por funções infinitamente diferenciáveis.

Teorema (Aproximação de funções Lebesgue integráveis)

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue integrável. Dado $\varepsilon > 0$ existe um intervalo finito (a,b) e uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LIMITADA tal que $g(x) = 0$ se $x \notin (a,b)$, g é infinitamente diferenciável e

$$\mathcal{L}\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Prova (Exercício)

(1) encontrar $[a,b]$ e f_1 tal que $f_1(x) = 0$ $\forall x \notin [a,b]$ e tal que

$$\mathcal{L}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_1(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

(2) Aproximar f_1 por uma função simples $f_2 \in \mathcal{L}$ tq $f_2(x) = 0$ $\forall x \notin [a,b]$ e tal que

$$\mathcal{L}\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x) - f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

(3) Aproximar f_2 por f_3 da forma

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \, \mathbb{1}_{J_i}(x)$$

, J_i intervalo finito e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x) - f_3(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

(4) Para terminar e obter a função infinitamente diferenciavel, basta aproximar $\mathbb{1}_J$ por uma função com essas propriedades.

Se $J = (a,b)$ e $0 < 2y < b-a$ defina

$$\phi_{a,y}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-a|^2 - y^2}} & \text{se } |x-a| < y \\ 0 & \text{se } |x-a| \geq y \end{cases}$$

Conclua.

A cobertura de Vitali

Definição:

Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, uma classe de intervalos $\{J_\alpha\}_{\alpha \in I}$ onde I é um conjunto de índices, diz-se uma cobertura de Vitali de E, se $\forall x \in E$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ J_α com $\alpha \in I$ tal que

$$x \in J_\alpha \text{ e } 0 < |J_\alpha| < \varepsilon.$$

Obs: os intervalos acima são não degenerados, senão tomaríamos como cobertura o conjunto singular formado pelo próprio ponto.

este teorema em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ tem de ser alterado, ver o Taylor

Teorema de Vitali — (Teorema 9.1 do Taylor)

Suponha que $E \subseteq \mathbb{R}$ é tal que $\lambda^* |E| < \infty$ (onde λ^* é a medida exterior de Lebesgue) e seja $J = \{J_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura de Vitali de E. Então existe uma coleção $J_1 = \{J_j\}_{j \geq 1}$ coleção numerável de conjuntos disjuntos contida em J ie

$$J_1 \subseteq J \quad e \quad J_j \cap I_k = \phi \text{ se } j \neq k, \text{ tal que}$$

$$\lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{j \geq 1} J_j\right) = 0$$

este teorema diz-nos que podemos cobrir o conjunto E com intervalos, a menos de um conj. de medida nula

* Este teorema diz-nos que podemos cobrir o conjunto E pelos conjuntos de J a menos de um conjunto de medida zero.

Verifique que se fizer a prova para a família $\bar{J_k}$ então o resultado vale para J_k

Prova: Vamos assumir que os intervalos J_k são fechados. Ora a família $\{J_k\}$ é uma cobertura de Vitali, logo se $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ $\exists$ J_k tal que $x \in J_k$ e $|J_k| < \varepsilon$ mas então $x \in \bar{J_k}$ (fecho de J_k) e $|\bar{J_k}| = |J_k| < \varepsilon$. Logo o fecho continua a ser uma cobertura de Vitali.

Ora como $E \subseteq \mathbb{R}$ é tal que $\lambda^* |E| < \infty$ então já sabemos que $\exists$

G aberto tal que $G \supseteq E$ e $\lambda^*(G) < \infty$. → regularidade de Lebesgue. Também podemos assumir que os intervalos J_α de J estão contidos em G, pois senão, da cobertura de Vitali, deitaríamos fora os intervalos que não estão contidos em G e ficávamos com os que estão contidos em G e ⊛ essa nova família de intervalos continua a ser uma cobertura de Vitali de E. Vejamos que tal é verdade ie ⊛.

Ora, seja $x \in E$ e $\varepsilon > 0$.

$x \in E \subseteq G \Rightarrow x \in G$

Seja δ tal que $d(x, G^c) = \delta > 0$.

J_α tem tamanho muito pequeno

⊛ Então se partirmos da família J, temos algum J_α tq $x \in J_\alpha$ e o tamanho de J_α pode ser tão pequeno quanto queiramos.

Então fazemos a escolha de J_α tq $\underbrace{0 <}\, |J_\alpha| < \delta \wedge \varepsilon$. Então $J_\alpha \subseteq G$.

esta cota inferior resulta do facto de $J_\alpha \in J$

∴ Esta nova subfamília é uma cobertura de Vitali de E.

Suponhamos então que temos $J_1, \dots J_m$ intervalos tal que $J_k \cap J_l = \emptyset$ se $k \neq l$ e vamos construir o próximo intervalo J_{m+1}, por indução.

Seja δ_m o supremo do tamanho dos intervalos em J que não intersectam nenhum dos intervalos $J_1, \dots, J_m$ ie

$$\delta_m = \sup \{ |J_\alpha| : J_\alpha \cap \bigcup_{k=1}^{m} J_k = \emptyset \}$$

Ora $S_m < \infty$ pois todos os intervalos estão contidos em G e $\lambda^*(G) < \infty$: $S_m < \lambda^*(G) < \infty$

Observa que a família no supremo acima poderia ser ϕ.

se $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ então a prova termina, pois temos uma família finita e portanto, numerável que satisfaz

$$\lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} J_j\Big) = 0$$

Agora suponhamos que $E \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} J_j$. Então $\exists\, x \in E$ tal que $x \notin \bigcup_{j=1}^{m} J_j$. Como os intervalos J_j são fechados temos

É aqui que precisamos de usar o facto dos intervalos serem fechados.

$d\big(x, \bigcup_{j=1}^{m} J_j\big) > 0$. Logo se $\varepsilon < d\big(x, \bigcup_{j=1}^{m} J_j\big)$, então como temos uma cobertura de Vitali ie $\exists\, J_\alpha$ tal que $x \in J_\alpha$ e $|J_\alpha| < \varepsilon$ e J_α é disjunto de todos os outros intervalos.

Assim $S_m > 0$ pois a família é não vazia ∇.

$\therefore$ $\boxed{0 < S_m < +\infty}$

Vamos construindo a família de intervalos da seguinte forma até um ponto em que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\vec{m}} J_j$. Suponha então que E não está contido em $\bigcup_{j=1}^{m} J_j$. Seja J_{m+1} um intervalo disjunto da união $\bigcup_{j=1}^{m} J_j$ com $\frac{S_m}{2} < |J_{m+1}| < S_m$ e

$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\bar{m}} J_j$ a prova termina. Senão, vamos progressivamente construindo os conjuntos J_k disjuntos mas temos de verificar que cobrem o conjunto E ie

$$\boxed{\lambda^*(E \setminus \bigcup_{j\geq 1} J_j) = 0}.$$

estão todos contidos em G

Ora $\sum_{k\geq 1} |J_k| = \lambda^*(\sum_{k\geq 1} J_k) \leq \lambda^*(G) < \infty$

são disjuntos

Vamos supôr que $\lambda^*(E \setminus \bigcup_{k\geq 1} J_k) > \delta > 0$ e vamos chegar a um absurdo.

Como $\lambda^*(\sum_{k\geq 1} J_k) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ N tal que

$$\sum_{k\geq N+1} |J_k| < \varepsilon$$

estes intervalos vão-nos dar uma cobertura de E

Vamos mostrar que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} J_j \cup \bigcup_{k\geq N+1} H_k$ onde os

H_k's são intervalos que contém J_k's mas são maiores. Vamos querer mostrar que

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k \subseteq \bigcup_{k\geq N+1} H_k.$$

Seja $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k$. Uma vez que δm foi definido como o supremo, então $\exists$ J na família $\{J_k\}$ com $|J|>0$ e tal que

$x \in J$ com $J \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = \phi$.

Fixamos esse intervalo J e agora vamos ver que esse conjunto tem intersecção não vazia com $J_{N+1}, J_{N+2}, \dots$ Seja então $m \geq N+1$ o primeiro índice para o qual se tem $J_m \cap J \neq \phi$ e $J_k \cap J = \phi$ para todo $1 \leq k \leq m-1$. Ou seja J_m e' o primeiro conjunto que intersecta J.

Afirmação: Existe tal intervalo J_m. (ie $m < \infty$)

Ora $|J| > 0$. Suponhamos que $J \cap \bigcup_{k=1}^{m} J_k = \phi$.
Então J e' um candidato para ser o intervalo J_{m+1}.
Mas isso diz-nos que $|J| \leq \sup\{ |J_\alpha| \dots \} = S_m$. Ora $S_m \to 0$ pois

$$\varepsilon > \sum_{k \geq N+1} |J_k|$$ mas todos os J_k são tais que

$|J_k| \geq \frac{S_k}{2}$. Logo temos $\varepsilon > \sum_{k \geq N+1} \frac{S_k}{2}$ donde resulta que $\lim_k S_k = 0$. Mas então isto não poderia ser verdade para todo m, pois teríamos $0 < |J| \leq S_m$ e $S_m \to 0$. Absurdo!

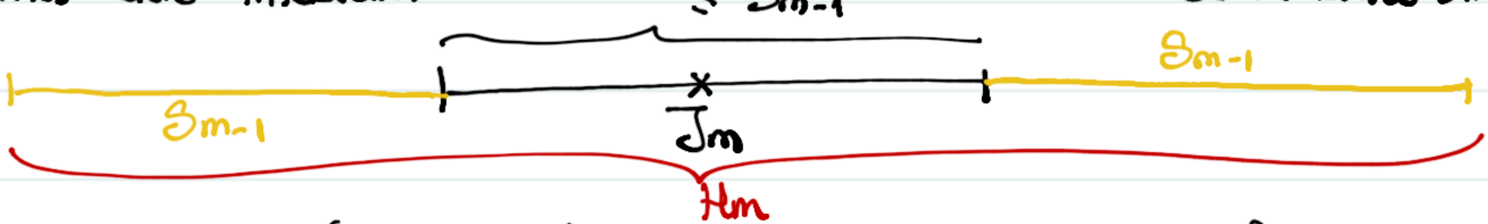
Com isto provamos que $\exists\, J$ tal que $J \cap J_m \neq \phi$ e J não intersecta os intervalos $J_1, \dots, J_{m-1}$ ie

$$J \cap \bigcup_{k=1}^{m-1} J_k = \phi.$$

Então J é um candidato para a etapa m, logo

$$|J| \le \delta_{m-1}.$$

Agora vamos definir os conjuntos H_k's. Para tal consideramos o intervalo J_m, selecionamos o ponto médio e agora justapomos dois intervalos de tamanho δ_{m-1}

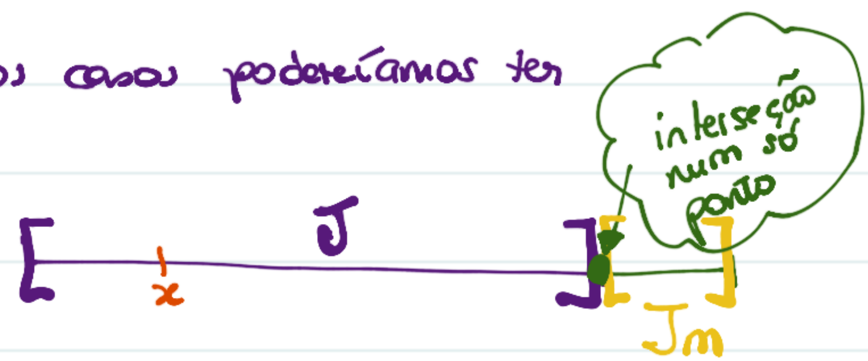


nos extremos (veja a figura). Seja H_m o intervalo final que resulta da união dos três intervalos.

Afirmação: $x \in H_m$.

Ora $x \in J$ e $J \cap J_m \neq \phi$. Então podemos ter

mas no pior dos casos poderíamos ter



Em qualquer caso, a distância de x à extremidade do intervalo é menor do que $|J| \le \delta_{m-1}$, logo $x \in H_m$.

Então $|H_m| \le 3\delta_{m-1}$ e $E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k \subseteq \bigcup_{k \ge N+1} H_k$

$$e \quad \lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{subaditividade} \\ \text{de } \lambda^*}}{\leq} \sum_{k\geq N+1} \underbrace{\lambda^*(H_k)}_{\leq 3\delta_{k-1}} \leq \sum_{k\geq N+1} 3\delta_{k-1} \leq 6\varepsilon \quad \boxed{*}$$

A desigualdade $\boxed{*}$ vem do facto de que $\displaystyle\sum_{k\geq N+1} \underbrace{|J_k|}_{\geq \frac{\delta_k}{2}} < \varepsilon$.

Para concluir note que

$$\lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k\right) > \delta > 0 \quad \text{e} \quad \text{por outro lado}$$

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k \subseteq \bigcup_{k\geq N+1} H_k$$

Daqui resulta que

$$\lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{k\geq 1} J_k\right) \leq \lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k\right)$$

$$\leq 6\varepsilon$$

Mas observe que se $\varepsilon < \frac{\delta}{6}$ temos uma contradição ✓

Corolário: Nas condições do resultado anterior, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ um conjunto finito $J_1, \ldots, J_p$ de conjuntos da família $\mathcal{J}$ tal que

$$\lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{p} J_j\right) < \varepsilon.$$

Prova: Recorde que na prova do teorema de vitali vimos que $\lambda^*(E \setminus \bigcup_{k \geq 1} J_k) = 0$, mas também vimos que $\forall \varepsilon > 0$

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k \geq N+1} J_k\right) \leq \varepsilon.$$

Daqui resulta que

$$\lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k\right) \underset{⊛}{\leq} \lambda^*\left(\bigcup_{k \geq N+1} J_k\right) + \lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{k \geq 1} J_k\right)$$

$$\leq \varepsilon.$$

⊛ esta desigualdade resulta do facto de que

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k \subseteq E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \cup \bigcup_{k \geq N+1} J_k$$

pois se $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} J_k$ então $x \in E$ mas $x \notin \bigcup_{k=1}^{N} J_k$

então $x \in \bigcup_{k \geq N+1} J_k$ ou $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$.

Agora vamos ver o próximo resultado que nos dá informação acerca da diferenciabilidade de funções monótonas!

Agora vamos entrar no último tema a discutir no nosso curso. A primeira questão está relacionada com a diferenciação pontual. Lembre que anteriormente provamos a existência da derivada de Radon-Nikodym $f := \frac{d\mu}{d\nu}$ de uma medida μ com respeito a outra medida ν mas f foi determinada no sentido das classes de equivalência (ie na classe das funções que coincidem q.c.). Para definir a derivada de Radon-Nikodym num ponto x vamos ter de analisar a topologia do espaço perto de x. Aqui vamos restringir-nos ao espaço da reta real $\mathbb{R}$. Vamos começar por discutir a diferenciação de funções monótonas!

Definição: Dizemos que $f: I \to \mathbb{R}$ onde $I = (a,b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ é monótona crescente se $\forall x, y \in I$ tq $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Num ponto $x \in I$ a função f pode não ser diferenciável mas existem sempre as derivadas laterais que definimos da seguinte forma:

Definição: $D^+ f(x) = \overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$; $D^- f(x) = \underline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$D_+ f(x) = \overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$; $D_- f(x) = \underline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

Diremos que f é diferenciável em $x \in I$ se todas estas derivadas laterais forem iguais e vamos chamar a esse valor $Df(x)$:

$$Df(x) = D^+f(x) = D^-f(x) = D_+f(x) = D_-f(x) \neq \pm\infty$$

f diferenciável em $x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q. $|h| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - Df(x) \right| < \varepsilon$

Observação: Lembre que uma função monótona crescente é contínua exceto no máximo num conjunto numerável de pontos (ver exercício da lista 1). Vamos agora querer provar que o conjunto de pontos em I onde f não é diferenciável tem medida zero.
Seja $A = \{x \in I : f$ não é diferenciável em $x\}$.
Observe que se f não é diferenciável em x então dois dos limites acima são diferentes. À partida não há razão para que A seja mensurável. Vamos agora obter propriedades de A.

Teorema: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ monótona crescente.
Então

$\boxed{1}$ $\lambda^*(A) = 0$ i.e. f é diferenciável q.c.

$\boxed{2}$ Df, a sua derivada, é Lebesgue mensurável

$\boxed{3}$

$$\int_a^b Df(x) \, d\lambda \leq f(b) - f(a)$$

Observação: • Como f é monótona crescente os limites que envolvem as definições de derivada são positivas.

- no ponto $\boxed{3}$ acima, a desigualdade pode ser estrita, por exemplo, tome

$Df = 0$ mas $f(b) > f(a)$

(Mais tarde vamos ver que a função de Cantor também vai dar uma desigualdade estrita acima).

Agora vamos à demonstração do teorema.

Prova: $\boxed{1}$ Lembre que na definição de derivada temos que analisar 4 tipos de limites. Vamos considerar o caso

$\{x : D_- f(x) < D^+ f(x)\}$ e os restantes ficam como exercício.

$x \in (a,b)$ já que retiramos os extremos pois alguns limites acima nas definições de $D^{\pm}$ não existem

Seja $A = \{x : D_- f(x) < D^+ f(x)\}$. Então

$$A \overset{(*)}{=} \bigcup_{\substack{u<v \\ u,v \in \mathbb{Q}}} \underbrace{\{x : D_- f(x) < u < v < D^+ f(x)\}}_{A_{u,v}}$$

$\boxed{*}$ a igualdade de cima obtém-se notando primeiro que $A_{u,v} \subseteq A$ para todo $u<v$ e por densidade dos racionais o conjunto A também está contido em algum conjunto da forma

$A_{u,v}$:

Ora como $\mathbb{Q}$ é numerável, para provar que $\lambda^*(A) = 0$, basta provar que $\lambda^*(A_{u,v}) = 0$ se

$$\lambda^*(\, x : \underbrace{D_- f(x)}_{= \underline{\lim}_{h \downarrow 0}} < u < v < \underbrace{D^+ f(x)}_{\overline{\lim}_{h\downarrow 0}}) = 0.$$

Vamos construir uma cobertura de Vitali deste conjunto.

$A_{u,v} \subseteq \mathbb{R}$

Vamos considerar todos os pontos tal que:

$$D_- f < u \iff \underbrace{\underline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < u}_{(1)}$$

$$D^+ f > v \quad = \quad \overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > v$$

Como vale (1) $\exists$ uma sequência $h_j \downarrow 0$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x-h_j)}{h_j} < u$$

e assim obtemos a cobertura de Vitali $[x - h_j, x]$. Logo, dado $x \in A_{u,v}$, existe um intervalo da forma $[x-h_j, x]$ que obviamente contém x e que tem medida menor do que ε. Observa que a sequência $\{h_j\}_j$ depende de x. Vejamos como obter essa cobertura.

Fixe $\varepsilon > 0$. Como $A_{u,v} \subseteq (a,b)$; $\lambda^*(A_{u,v}) < \infty$. Então $\exists\, G$ aberto tal que $G \supseteq A_{u,v}$ e $\boxed{\lambda^*(G) \leq \lambda^*(A_{u,v}) + \varepsilon.}$

Agora vamos construir a cobertura de Vitali. Nota que se $x \in A_{u,v}$ então $\exists\, h_j \downarrow 0$ tq $f(x) - f(x-h_j) < u h_j$. Agora consideramos os intervalos $[x-h_j, x]$ mas apenas vamos ficar com este tipo de intervalos que estão contidos em G.

Ou seja
$$\mathcal{J} = \left\{ [x-h_j, x] \;;\; x \in A_{u,v} \,,\; \begin{array}{l} f(x)-f(x-h_j) < u h_j \text{ e} \\ [x-h_j, x] \subseteq G \end{array} \right\}$$

é a cobertura de Vitali do conjunto $A_{u,v}$.

Vejamos que tal é verdade!

Ora se $y \in A_{u,v}$, então podemos encontrar uma família de intervalos da forma $[y-h_j, y]$, ora $y \in [y-h_j, y]$, além disso, $|[y-h_j, y]| = h_j > 0$ e se j é suficientemente grande, fixado $\delta > 0$, como a sequência $h_j \downarrow 0$, tem-se $h_j < \delta$ e portanto
$$0 < |[y-h_j, y]| < \delta,$$
como gostaríamos.

$\therefore\ \mathcal{J}$ é uma cobertura de Vitali de $A_{u,v}$!

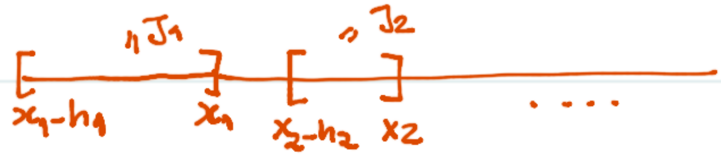
Agora usamos o corolário do teorema de Vitali que nos diz que $\exists\, J_1, \dots, J_M \in \mathcal{J}$ tal que $J_k \cap J_j = \phi$ e
$$\lambda^*\left(A_{u,v} \setminus \bigcup_{j=1}^{M} J_j\right) \leq \varepsilon.$$

Seja J_j um dos intervalos acima. Nota que $J_j \in \mathcal{J}$, logo

$$J_j = [x_j - h_j, x_j] \quad \text{para} \quad x_j \in A_{u,v}.$$

Obs:

Acima estamos a considerar os intervalos ordenados ie



Agora notemos que

$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j) - f(x_j - h_j) \leq \sum_{j=1}^{N} u h_j = u \, \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{N} J_j \right) \boxed{*}$$

Como $J_j \subseteq G$ $\forall j$, logo $\bigcup_{j=1}^{M} J_j \subseteq G$ e portanto $\boxed{*} \leq u\lambda^*(G)$

$$\leq u\left(\lambda^*(A_{u,v}) + \varepsilon\right)$$

ou seja

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} f(x_j) - f(x_j - h_j) \leq u\left(\lambda^*(A_{u,v}) + \varepsilon\right)}$$

Vamos agora considerar $J_j^0 = (x_j - h_j, x_j)$ o interior de J_k.

Considere agora o conjunto

$$A_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{N} J_j^0 \right).$$

Nota que

$$A_{u,v} = \left(A_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{M} J_j^0 \right) \right) \cup \left(A_{u,v} \setminus \bigcup_{j=1}^{M} J_j^0 \right)$$

então

$$\lambda^*(A_{u,v}) \leq \lambda^*\left(A_{u,v} \cap \bigcup_{j=1}^{M} J_j^0 \right) + \lambda^*\underbrace{\left(A_{u,v} \setminus \bigcup_{j=1}^{M} J_j^0 \right)}_{(1)}$$

Observa que

$$(1) \subseteq \left(A_{u,v} \setminus \bigcup_{j=1}^{M} J_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{M} \underbrace{J_j \setminus J_j^{o}}_{\{x_j - h_j,\, x_j\}}\right)$$

Assim $\lambda^*((1)) \leq \underbrace{\lambda^*\left(A_{u,v} \setminus \bigcup_{j=1}^{M} J_j\right)}_{\leq \varepsilon \text{ ver ✡ acima.}} + \underbrace{\lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{M} \{x_j - h_j, x_j\}\right)}_{=0}$

$\therefore \lambda^*((1)) \leq \varepsilon$

e assim (✡✡✡) $\lambda^*(A_{u,v}) \leq \lambda^*\Big(\underbrace{A_{u,v} \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{M} J_j^{o}\Big)}_{B}\Big) + \varepsilon$

Agora vamos construir uma cobertura de Vitali de B.

Seja $y \in B$. Então $y \in A_{u,v}$ e por definição de $A_{u,v}$, sabemos que $\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \dfrac{f(y+h) - f(y)}{h} > v$.

Logo, $\exists\, k_\ell \downarrow 0$ tal que $f(y+k_\ell) - f(y) > v k_\ell$.

Agora vamos ter que ter algum cuidado na cobertura. Vamos escolher um k_ℓ que nos dê alguma propriedade importante. A ideia é a seguinte. Sabemos que $y \in B$. Então $y \in \bigcup_{j=1}^{M} J_j^{o}$. Vamos pedir que k_ℓ seja suficientemente pequeno para que o intervalo $[y, y+k_\ell] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} J_j^{o}$. Mas como estes intervalos são disjuntos, estamos na verdade a pedir que k_ℓ seja suficientemente peque no tal que $[y, y+k_\ell] \subseteq J_j^\circ$ para algum $j \in \{1, \dots, M\}$.

Assim temos

$$\tilde{J} = \left\{ [y, y+k_\ell] : \begin{array}{l} y \in B \text{ ; } k_\ell \text{ é tal que } [y, y+k_\ell] \subseteq I_j^\circ \text{ para} \\ \text{algum } j \in \{1, \dots, M\} \text{ e} \\ |f(y+k_\ell) - f(y)| \underset{(**)}{>} v k_\ell \end{array} \right\}$$

Afirmação: $\tilde{J}$ é uma cobertura de vitali do conjunto B.

Provemos esta afirmação. Seja $z \in B$ e $\delta > 0$. Ora, como $z \in B$, $z \in [z, z+k_\ell]$, com $|[z, z+k_\ell]| = k_\ell < \delta$ para k_ℓ suficientemente grande. Além disso $k_\ell > 0$ e vale a desigualdade (**).

Logo J é uma cobertura de vitali de B.

Pelo corolário do teorema de vitali, sabemos que existem $\tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_N$ tal que $\lambda^*\left(B \setminus \bigcup_{\ell=1}^{N} \tilde{J}_\ell\right) \leq \varepsilon$, e os conjuntos $\tilde{J}_\ell$ são disjuntos dois a dois.

Observa que como $B = \left(B \cap \left(\bigcup_{\ell=1}^{N} \tilde{J}_\ell \right) \right) \cup \left(B \setminus \bigcup_{\ell=1}^{N} \tilde{J}_\ell \right)$

então

$$\lambda^*(B) \leq \underset{\displaystyle \sum_{\ell=1}^{N} |\tilde{J}_\ell|}{\underset{\rotatebox{90}{$\leq$}}{\lambda^*\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} \tilde{J}_\ell \right)}} + \underbrace{\lambda^*\left(B \setminus \bigcup_{\ell=1}^{N} \tilde{J}_\ell \right)}_{\leq \varepsilon}$$

$$\therefore \lambda^*(B) \leq \sum_{\ell=1}^{N} |\tilde{J}_\ell| + \varepsilon$$

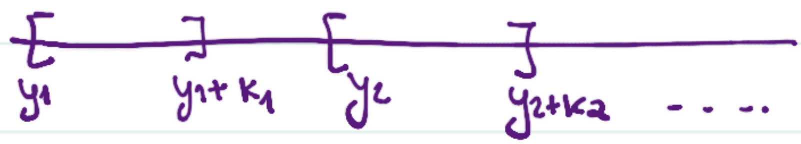
Por outro lado, veja (☆☆☆) sabemos que

$$\lambda^*(B) \geq \lambda^*(A_{u,v}) - \varepsilon,$$

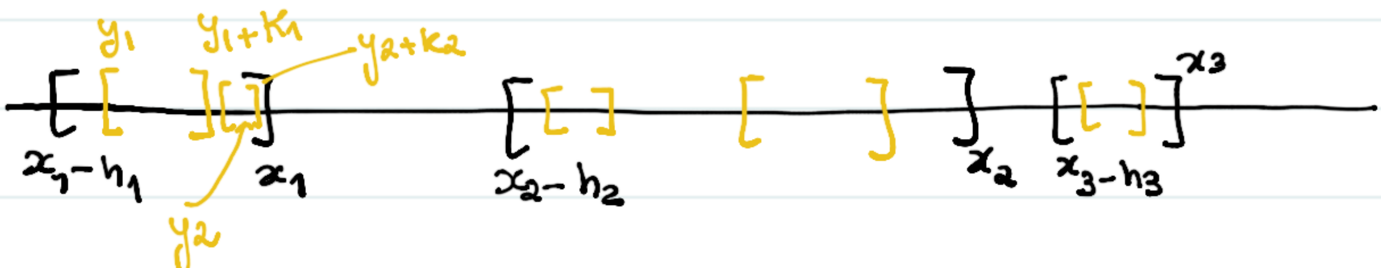
donde resulta que

$$\sum_{l=1}^{N} |\tilde{J}_l| \geq \lambda^*(A_{u,v}) - 2\varepsilon.$$

Lembremos que por construção $\tilde{J}_l = [y_l, y_l + k_l]$ e, como fizemos acima, assumimos que estão ordenados



Agora recordemos também que estes intervalos $\tilde{J}_l$ estavam contidos nos intervalos J_j ie



<u>obs</u> por construção cada intervalo $\tilde{J}_l$ estava contido num intervalo J_j da 1ª construção da cobertura de Vitali. Esta propriedade vai ser importante pois dá-nos informação da variação da função f nesse intervalo.

Observa que como f é monótona crescente, o incremento de f

em J_1 é maior ou igual do que a soma dos incrementos de f ao longo dos intervalos que compõe J_1, isto é

$$\underbrace{f(x_1) - f(x_1 - h_1)}_{\text{incremento de } f \text{ em } J_1} \geq \sum_{i=1}^{N_1} \left[f(a_{i+1}^{(1)}) - f(a_i^{(1)}) \right]$$

Esta desigualdade vale em todos os intervalos, isto é

$$\sum_{j=1}^{M} f(x_j) - f(x_j - h_j) \geq \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_j} \underbrace{\left(f(a_{i+1}^{(j)}) - f(a_i^{(j)}) \right)}_{\text{estes incrementos são nos intervalos } \tilde{J}_\ell}$$

$$\therefore \underbrace{\sum_{j=1}^{M} f(x_j) - f(x_j - h_j)}_{\substack{\text{a soma dos incrementos de} \\ f \text{ nos intervalos } J_j}} \geq \sum_{\ell=1}^{N} f(y_\ell + k_\ell) - f(y_\ell)$$

a soma dos incrementos de f nos intervalos J_j $\geq$ a soma dos incrementos de f nos intervalos menores $\tilde{J}_\ell$.

mas $$\sum_{\ell=1}^{N} f(y_\ell + k_\ell) - f(y_\ell) \geq \sum_{\ell=1}^{N} v k_\ell$$

$$= v \sum_{\ell=1}^{N} |\tilde{J}_\ell|$$

$$\geq v \left(\lambda^*(A_{u,v}) - 2\varepsilon \right)$$

Mas também já tínhamos provado que

$$\sum_{j=1}^{M} f(x_j) - f(x_j - h_j) \leq u\left(\lambda^*(A_{u,v}) + \varepsilon \right).$$

Pondo tudo junto temos

$$u\left(\lambda^*(A_{u,v}) + \varepsilon \right) \geq v\left(\lambda^*(A_{u,v}) - 2\varepsilon \right)$$

$\forall \varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$u\, \lambda^*(A_{u,v}) \geq v\, \lambda^*(A_{u,v}).$$

Mas pela definição de u e v temos $u < v$. Logo a desigualdade de acima só pode ser verdadeira se $\lambda^*(A_{u,v}) = 0$ como queríamos demonstrar.

Com isto terminámos a prova de $\boxed{1}$.

Agora vamos provar $\boxed{2}$, ie D_f é Lebesgue mensurável.

Prova: Observe que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona crescente.

Vamos estender a função f definindo $f(x) = f(b), \forall x \geq b$.

Pelo ponto $\boxed{1}$ o conjunto de pontos onde f não é diferenciável tem medida nula, e como a σ-algebra de Lebesgue é completa este conjunto é Lebesgue mensurável.

Definimos $$f_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}$$ repare aqui a necessidade de estender a função f.

f mon. cresc. $\Rightarrow$ f tem no max. um nº enum de descontinuidades $\rightarrow$ f Leb. mensurável.

Como f é Lebesgue mensurável, então f_n é Lebesgue mensurável.

E $f_n \to f'$ q.c., pois $f_n(x) \to f'(x)$ e os pontos onde a derivada existe são tais que o seu complementar tem medida nula. Logo $Df = f'$ é Lebesgue mensurável, por ser limite q.c. de uma sequência de funções Lebesgue mensuráveis e a σ-álgebra de Lebesgue é completa. Podemos decretar $Df(x)=0$ $\forall x \in \{x : f \text{ não é dif em } x\}$. Observe também que $f_n(x) \geq 0$ porque f é monótona crescente, e e portanto $Df(x) \geq 0$ q.c.

Isto termina a prova do ponto $\boxed{2}$.

Vamos provar o ponto $\boxed{3}$ ie

$$\int_a^b Df \, d\lambda \leq f(b) - f(a)$$

Ora pelo Lema de Fatou

$$\int_a^b Df \, d\lambda \leq \underline{\lim} \int_a^b f_n \, d\lambda$$

$$= \underline{\lim} \int_a^b n \left(f(x+1/n) - f(x) \right) d\lambda$$

Vamos analisar o integral acima:

$$\int_a^b n f(x+1/n) \, d\lambda - \int_a^b n f(x) \, d\lambda$$

$$\overset{\shortparallel}{} \int_{a+1/n}^{b+1/n} nf \, d\lambda - \int_a^b nf \, d\lambda$$

$$= \int_b^{b+1/n} nf \, d\lambda - \int_a^{a+1/n} nf \, d\lambda$$

- ora em $[b, b+1/n]$ estendemos f como sendo constante e igual a $f(b)$, logo $\int_b^{b+1/n} f \, d\lambda = \frac{f(b)}{n}$

- no intervalo $[a, a+1/n]$ a função f é sempre minorada por $f(a)$ pois f é monótona crescente.

Então $\int_a^{a+1/n} f \, d\lambda \geq \frac{f(a)}{n}$

Pondo tudo junto temos

$$\int_a^b Df \, d\lambda \leq \underline{\lim} \int_a^b f_n \, d\lambda \leq \underline{\lim}\, n \left[\frac{f(b)}{n} - \frac{f(a)}{n} \right]$$

$$= f(b) - f(a)$$

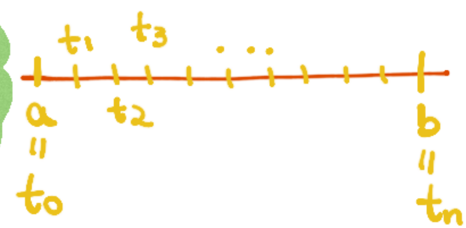
Funções de variação limitada

Seja $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja π uma partição de $[a,b]$

$$\pi = \{ t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \}$$

Vamos denotar a variação de f nessa partição por

$$V_f(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} | f(t_{i+1}) - f(t_i) |$$



Sejam $P_f(\pi)$ e $N_f(\pi)$ as variações positiva e negativa, respectivamente, de f :

$$P_f(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^+$$

$$N_f(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^-$$

Daqui segue que $V_f(\pi) = P_f(\pi) + N_f(\pi)$ (pois para qualquer função $|f| = f^+ + f^-$)

Agora vamos considerar o supremo ie

$$V_f([a,b]) = \sup_{\pi} V_f(\pi)$$

onde o supremo é sobre todas as partições finitas de $[a,b]$.

Definição: Dizemos que f tem variação limitada (VL) se $V_f([a,b]) < \infty$.

Proposição: Se f tem VL então $f = \tilde{f} - \tilde{g}$ onde $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são funções monótonas crescentes. Na verdade este resultado é uma equivalência ie $f = \tilde{f} - \tilde{g}$, $\tilde{f}, \tilde{g}$ mon. cresc. $\Leftrightarrow$ f tem VL

Esta proposição vai-nos permitir concluir que uma função de VL é diferenciável q.e. uma vez que já vimos que isso é verdade para $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ que são funções monótonas crescentes.

Prova: Analogamente a $V_f([a,b])$ podemos definir

$$P_f([a,b]) = \sup_{\pi} P_f(\pi) \quad \text{e} \quad N_f([a,b]) = \sup_{\pi} N_f(\pi)$$

Afirmamos que:

1. $V_f([a,b]) = P_f([a,b]) + N_f([a,b])$
2. $P_f([a,b]) - N_f([a,b]) = f(b) - f(a)$

se f é de VL em $[a,b]$.

Observação: se acima colocarmos $b = x$ então temos em 2

$$P_f([a,x]) - N_f([a,x]) = f(x) - f(a)$$

e assim resulta que f é diferença de duas funções crescentes: $P_f([a,x])$ e $N_f([a,x])$.

A prova da proposição resulta da observação anterior. ✓

Vamos agora provar 1

• suponhamos que $\boxed{V_f([a,b]) < \infty.}$ A

então, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar uma partição finita de $[a,b]$ que quase realiza o supremo, ie

$\exists \pi$ t.q. $V_f(\pi) \leqslant V_f([a,b]) \leqslant V_f(\pi) + \varepsilon$

Por outro lado

$$V_f(\pi) = P_f(\pi) + N_f(\pi) \leqslant P_f([a,b]) + N_f([a,b])$$

Pondo as duas desigualdades acima juntas, temos que:

$$\boxed{V_f([a,b]) \leqslant P_f([a,b]) + N_f([a,b]) + \varepsilon} \quad (1)$$

Agora vamos provar a desigualdade contrária.

Como $P_f([a,b]) < \infty$ então $\exists\, \pi_1$ partição finita de $[a,b]$ tal que $P_f([a,b]) \leqslant P_f(\pi_1) + \varepsilon$ e analogamente $\exists\, \pi_2$ partição finita de $[a,b]$ tal que $N_f([a,b]) \leqslant N_f(\pi_2) + \varepsilon$.

Seja $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Então π é uma partição mais fina de $[a,b]$. Como $(\varphi + \psi)^+ \leq \varphi^+ + \psi^+$ então

$$P_f(\pi_1) \leq P_f(\pi) \qquad e \qquad N_f(\pi_2) \leq N_f(\pi)$$

Logo
$$P_f([a,b]) \leq P_f(\pi_1) + \varepsilon \leq P_f(\pi) + \varepsilon \quad \text{e} \quad N_f([a,b]) \leq N_f(\pi_2) + \varepsilon \leq N_f(\pi) + \varepsilon$$

Assim obtemos
$$\boxed{P_f([a,b]) + N_f([a,b])} \leq P_f(\pi) + N(f) + \varepsilon + \varepsilon$$
$$= V_f(\pi) + 2\varepsilon$$
$$\boxed{\leq V_f([a,b]) + 2\varepsilon} \quad (2)$$

De (1) e (2) segue a igualdade que queríamos provar.
Assim a prova termina no caso $V_f([a,b]) < \infty$.

B $\boxed{V_f([a,b]) = +\infty}$ nota que se o objetivo fosse usar (1) para provar a proporção, nem precisaríamos de incluir este caso. Mas na verdade também vale.

Ora $\forall k > 0 \ \exists \tilde{\pi}$ partição finita de $[a,b]$ t.q. $V_f(\tilde{\pi}) > k$

$$k < V_f(\tilde{\pi}) = P_f(\tilde{\pi}) + N_f(\tilde{\pi}) \leq P_f([a,b]) + N_f([a,b])$$

Então $\forall k > 0$, $P_f([a,b]) + N_f([a,b]) \geq V_f(\tilde{\pi}) > k$
$$\therefore \ P_f([a,b]) + N_f([a,b]) = +\infty = V_f([a,b])$$

e novamente vale a igualdade.

Agora vamos provar 2. Por hipótese temos $V_f([a,b]) < \infty$. Acima já vimos que $P_f([a,b]), N_f([a,b]) < \infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ e sejam π_1 e π_2 partições que quase atingem o supremo ie
$$\left.\begin{aligned} P_f(\pi_1) &\leq P_f([a,b]) \leq P_f(\pi_1) + \varepsilon \\ N_f(\pi_2) &\leq N_f([a,b]) \leq N_f(\pi_2) + \varepsilon \end{aligned}\right\} \circledast$$

Seja $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Notemos que as mesmas desigualdades $\circledast$ valem para π. Ora

$$P_f(\pi) \leq P_f([a,b]) \quad \text{por definição de supremo}$$

Agora como π é mais fina do que π_1 também temos

$$P_f(\pi_1) \leq P_f(\pi)$$

e

$$N_f(\pi_2) \leq N_f(\pi).$$

Então temos

$$P_f(\pi) \leq P_f([a,b]) \leqslant P_f(\pi) + \varepsilon$$

$$N_f(\pi) \leq N_f([a,b]) \leqslant N_f(\pi) + \varepsilon$$

Logo $P_f([a,b]) - N_f([a,b]) \leqslant P_f(\pi) + \varepsilon - N_f(\pi)$

e $P_f([a,b]) - N_f([a,b]) \geqslant P_f(\pi) - N_f(\pi) - \varepsilon$

Então $P_f(\pi) - N_f(\pi) - \varepsilon \leq P_f([a,b]) - N_f([a,b]) \leq P_f(\pi) - N_f(\pi) + \varepsilon$

Ora para π fixada temos $P_f(\pi) - N_f(\pi)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)^+ - \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)^-$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - f(t_i) \underset{\text{soma telescópiza}}{=\!=\!=} \boxed{f(b) - f(a)}$$

Então acima temos

$$f(b) - f(a) - \varepsilon \leq P_f([a,b]) - N_f([a,b]) \leq f(b) - f(a) + \varepsilon$$

e daqui resulta a igualdade.

obs $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é contínua em $x=0$ mas não é de V.L.

Digressão: Se f é monótona crescente então já vimos que é diferenciável q.c. Também já vimos que

$$\int_a^b Df \, d\lambda \leq f(b) - f(a),$$

e já vimos que a desigualdade acima pode ser estrita.
Uma questão natural é saber quando é que vale a igualdade acima? Isto é quais são as funções F tais que

$$✡ \quad F(x) = F(a) + \int_a^x f \, d\lambda \quad \text{para alguma função } f.$$

Suponhamos então que F escreve-se da forma ✡.
Se f é integravel (λ) já vimos no nosso curso que
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $\forall E \in \mathcal{F}$ com $\lambda(E) < \delta \Rightarrow \int_E f \, d\lambda < \varepsilon$.

Suponha que $E = \sum_{j=1}^{k} I_j$ onde I_j é um intervalo para todo $j = 1, \dots, k$.
A condição $\lambda(E) < \delta \iff \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j) < \delta$

Então $$\int_E |f| \, d\lambda = \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} |f| \, d\lambda < \varepsilon$$

se $I_j = [a_j, b_j]$ então $$\varepsilon > \int_E |f| \, d\lambda = \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} |f| \, d\lambda$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{a_j}^{b_j} f \, d\lambda \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)|$$

Observamos que para F que se escreve como em ✡ se tem que se $\lambda(E) < \delta$ então $\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$ ie a variação de F é menor do que ε.

Este exemplo leva-nos a introduzir a seguinte definição.

Definição: Seja $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que F é absolutamente contínua se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tq } \sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$$

onde os intervalos $(a_j, b_j) \subset (a,b)$ são disjuntos.

Observação: F absolutamente contínua $\Rightarrow$ F contínua (verifique)

O nosso objetivo agora consiste em provar que se F é absolutamente contínua então F é diferenciável q.c. e F escreve-se como o integral da sua derivada. Teorema f. do calculo: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ então F é dif em (a,b) e $F'(x) = f(x)$. O objetivo consiste em analisar o TFCalculo para o integral de Lebesgue. Vamos ver que nem sempre é verdade que $\int_a^b F'(x)\,dx \overset{?}{=} F(b) - F(a)$

Lema: F absolutamente contínua $\Rightarrow$ F tem V.L.

e portanto F é diferenciável q.c.

Prova: Considere $\varepsilon = 1$ na definição de absoluta continuidade

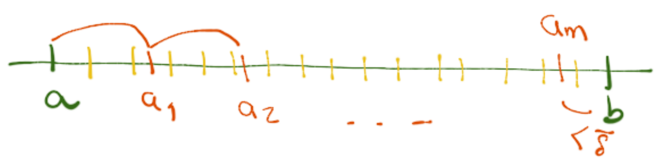
Então $\exists \delta > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < 1$$

Queremos provar que F tem VL ie o supremo da variação de F sob todas as partições finitas de [a,b] é finito.

Seja então Π uma partição finita de [a,b] e queremos estudar $|F(t_{i+1}) - F(t_i)|$. Ora temos o intervalo [a,b]:

Temos a partição Π a amarelo na figura. Vamos acrescentar à partição os pontos



$a_1 = a + \tilde{\delta}$

$a_2 = a_1 + \tilde{\delta}$

$\vdots$

$a_m = a_{m-1} + \tilde{\delta} < b, \tilde{\delta} < \delta$

Observa que a variação de F no primeiro intervalo (a, a_1) é menor do que 1, e o mesmo vale nos restantes intervalos (a_i, a_{i+1}) pois o tamanho de cada um dos intervalos é menor do que δ.

Agora acrescentamos à partição Π estes pontos $\{a_i\}_{i=1,\dots,m}$ e chamemos a essa partição $\tilde{\Pi}$: $\tilde{\Pi} = \Pi \cup \{a + k\tilde{\delta}\}_k$.

Note que dividimos o intervalo [a,b] em intervalos de tamanho δ, logo quando somos os pontos extra temos

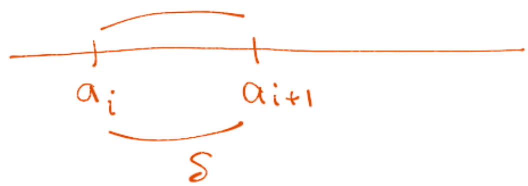
$$M = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$$ → este é o último interva-

lo que tem tamanho menor do que δ. E notemos que por construção, a variação de F em cada um desses intervalos é menor do que 1.

Então se $\tilde{t}_i$ denotar os pontos da partição $\tilde{\Pi}$ temos

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{m} |F(\tilde{t}_{i+1}) - F(\tilde{t}_i)|}_{\le M} \ge \sum_{j=0}^{n-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)|$$

$\le M$ pois a variação de F em cada intervalo



é menor do que 1.

Nota que o valor M não depende da partição, só depende do valor de $\tilde{\delta}$ (que nos diz quantos intervalos vamos obter de $[a,b]$)

Assim a estimativa que obtivemos não depende de Π e portanto é uniforme sob todas as partições

$$\therefore \; V_F([a,b]) = \sup_{\Pi} \sum_{j=0}^{n-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)|$$

$$\le M.$$

$\therefore$ F tem V.L.

pag 230 Taylor

Lema Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é Lebesgue integrável em $[a,b]$ e $\int_a^x f \, d\lambda = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ então $f = 0$ q.c.

Prova: Vamos provar por redução ao absurdo e para tal supomos que $\lambda\{x : f(x) > 0\}$ ou $\lambda\{x : f(x) < 0\}$ é estritamente positivo. Suponhamos então que

$$\lambda\{x : f(x) > \varepsilon\} > \delta > 0.$$

Já sabemos, pela regularidade da medida de Lebesgue, que podemos aproximar este conjunto por um conjunto fechado e um conjunto aberto, ie $\exists F$ fechado tal que

$$F \subseteq \{x : f(x) > \varepsilon\}$$

$$\text{e} \quad \lambda(F) > \frac{\delta}{2} > 0.$$

Observemos que $G = F^c$ é um aberto. Então

$$G = \sum_{j\geq 1} (a_j, b_j)$$ (ie G escreve-se como união numerável disjunta de intervalos abertos)

Logo, por hipótese sabemos que $\int_{a_j}^{b_j} f \, d\lambda = 0 \quad \forall j$.

Mas f é integrável e portanto o integral de f define uma função ν σ-aditiva:

$$\nu(B) = \int_B f \, d\lambda$$

Então $$\nu(G) = \sum_{j\geq 1} \nu(a_j, b_j) = \sum_{j\geq 1} \int_{a_j}^{b_j} f \, d\lambda = 0$$

$$\nu(G) = \int_G f \, d\lambda$$

Então $$\int_F f \, d\lambda = \int_a^b f \, d\lambda - \int_G f \, d\lambda = 0 - 0 = 0$$

pois $F = [a,b] \setminus G$

Mas no conjunto F temos $f > \varepsilon$ e portanto obtemos

$$0 = \int_F f\, d\lambda > \varepsilon \underbrace{\lambda(F)}_{>0} \qquad \text{Absurdo.}$$

teorema 9.3 Taylor.

Lema Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrável em $[a,b]$ e $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$\boxed{F(x) = F(a) + \int_a^x f\, d\lambda}$$

Então F é diferenciável q.t.p. e $F' = f$ q.e.

Prova:

Já sabemos que $f = f^+ - f^-$ e desta forma podemos escrever

$$F(x) = \underset{\substack{\parallel \\ F^+(a) - F^-(a)}}{F(a)} + \int_a^x f^+\, d\lambda - \int_a^x f^- \,d\lambda.$$

$$\therefore\ F(x) = F^+(x) - F^-(x) \quad \text{onde}$$

$$F^+(x) = F^+(a) + \int_a^x f^+\, d\lambda$$

$$F^-(x) = F^-(a) + \int_a^x f^-\, d\lambda$$

Então podemos provar o resultado assumindo $f \geq 0$. Vamos obter as derivadas $(F^+)'$ e $(F^-)'$ q.e. e também vamos ter $(F^+)' = f^+$ e $(F^-)' = f^-$ e depois fazemos

$$F' = (F^+)' - (F^-)' = f^+ - f^- = f$$

- seja $f \geq 0$ e assumimos também que f é limitada, ie $f \leq K$.

Seja $f_n(x) = \dfrac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n}$

Ora $$f_n(x) = n\left[F(a) + \int_a^{x+1/n} f\, d\lambda - F(a) - \int_a^x f\, d\lambda \right]$$

$$= n\left[\int_x^{x+1/n} \underbrace{f}_{\leq K}\, d\lambda \right] \leq K$$

Então $f_n(x) \leq K$ e $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} F'$ q.c. (F tem VL e portanto F' existe q.c.)

logo $F' \leq K$ q.c.

Então pelo TCD temos

$$\int_a^x F'\, d\lambda = \int_a^x \lim_n f_n\, d\lambda$$

$$\overset{TCD}{=} \lim_n \int_a^x f_n\, d\lambda$$

$$= \lim_n \int_a^x n\left[F\left(x+\tfrac{1}{n}\right) - F(x)\right] d\lambda$$

$$= \lim_n n\left\{ \int_{a+1/n}^{x+1/n} F\, d\lambda - \int_a^x F\, d\lambda \right\}$$

$$= \lim_n n\left\{ \int_x^{x+1/n} F\, d\lambda - \int_a^{a+1/n} F\, d\lambda \right\}$$

pela continui- } $= F(x) - F(a)$
dade de F (F com VL $\Rightarrow$ F contínua).

Então $F(x) - F(a) = \int_a^x F' \, d\lambda.$

Agora temos de retirar a condição de que f é limitada. Para tal fazemos o seguinte; vamos escrever a função f de forma a podermos usar o resultado anterior.

Notemos que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f \wedge k + [f - f \wedge k] \, d\lambda$$

para k fixado.

Seja então $F_k(x) = F(a) + \int_a^x \overbrace{\underbrace{f \wedge k}_{\leq k}}^{\leq f} \, d\lambda$

$$\therefore F(x) = F_k(x) + \overbrace{\int_a^x f - f \wedge k \, d\lambda}^{:= G_k(x)}$$

Pelo que provamos acima, sabemos que F_k é diferenciável q.c.

e $F_k' = f \wedge K$ q.c.

Lembremos que como $f \geq 0$, F é monótona crescente, logo F é diferenciável q.c. e portanto sabemos que

$$F(x) - F(a) \geq \int_a^x F' \, d\lambda$$

Af. $F_k' \leq F$
Ora $G_k(x)$ é uma função monótona crescente pois $f - f \wedge k \geq 0$
Logo G_k' existe q.c e $G_k' \geq 0$ □

Por outro lado, como $f \geq 0$ então

$$F_k(x) = F(a) + \int_a^x \overbrace{f \wedge k}^{\leq f} \, d\lambda$$

Então

$$F(x) - F(a) \geq \int_a^x F' \, d\lambda \geq \int_a^x F_k' \, d\lambda \quad \forall k$$

$$= \int_a^x f \wedge k \, d\lambda \quad \forall k$$

$$\Big\downarrow \text{TCM}$$

$$\int_a^x f \, d\lambda = F(x) - F(a)$$

Daqui obtemos $\quad F(x) - F(a) = \int_a^x F' \, d\lambda.$

$$\therefore \; F' = f \text{ q.c.}$$

Lema → pag 233 Taylor
Se $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua tal que $F'(x) = 0$ q.c.

então F é constante.

Prova: Seja $c \in [a,b]$ fixado e $E = \{x \in [a,c] : F'(x) = 0\}$.
Ora $E \subseteq [a,c]$. Seja $x \in E$, então $F'(x) = 0$.
Seja $\epsilon > 0$.
Por definição de derivada, $\exists\, h > 0$ tal que

$$|F(x+h) - F(x)| < \varepsilon h$$

e obtemos a cobertura de Vitali $[x, x+h]$ de E. Pelo Teorema de Vitali, para $\delta > 0$ fixado, $\exists\, N$ tal que

$$\lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} [x_j, x_j+h_j]\right) < \boxed{\delta}$$

↳ este δ vai ser fixado pelo facto da função ser absolutamente contínua

Queremos provar que F é constante e queremos estimar $F(c)-F(a)$. Vamos comparar F em c com F no 1º ponto do intervalo e por aí em diante.

Afirmamos que $\lambda^*\left([a,c] \setminus \bigcup_{j=1}^{N} [x_j, x_j+h_j]\right) < \delta$ pois

$$\lambda^*\left([a,c]\setminus \bigcup_{j=1}^{N} [x_j, x_j+h_j]\right) \leq \lambda^*(E\setminus \bigcup\ldots) + \underbrace{\lambda^*(E^c\setminus\ldots)}_{\leq \lambda(E^c)=0}.$$

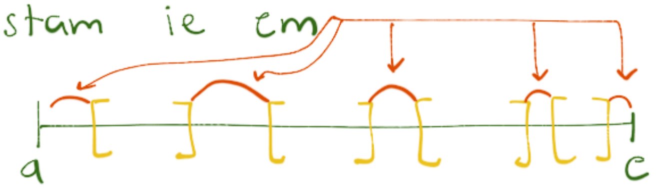
Então como temos os intervalos:

Nota que nos intervalos da forma $[x_j, x_j+h_j]$ que são os intervalos da cobertura de Vitali temos

$$|F(x_j+h_j) - F(x_j)| \leq \varepsilon h_j$$

e então a contribuição da variação de F nesses intervalos é no máximo $\underbrace{(c-a)}_{\text{tamanho do intervalo}}\varepsilon$.

Agora falta analisar a variação da função F nos intervalos que restam ie em



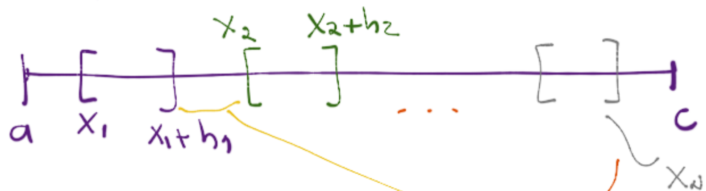
Mas estes intervalos têm tamanho

$$\lambda^*\left([a,c] \setminus \bigcup_{j=1}^{N} [x_j, x_j + h_j] \right) < \delta \qquad (\lambda^* = | \, |)$$

e como F é absolutamente contínua então a variação de F nestes intervalos é menor do que ε.

Então, temos assim

• para simplificar a escrita suponhamos que $x_j + h_j < x_{j+1}$ ie



$$|F(c) - F(a)| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \overbrace{|F(x_j + h_j) - F(x_j)|}^{<\varepsilon h_j}}_{\varepsilon(c-a)}$$

$$+ |F(c) - F(x_N)| + \sum_{j=1}^{N-1} |F(x_{j+1}) - F(x_j + h_j)|$$

$$+ |F(x_1) - F(a)|$$

esta variação está aqui

(**)

Como a soma do tamanho destes intervalos é menor do que δ e F é absolutamente contínua, então (**)

$< \varepsilon.$

Então concluímos que $|F(c) - F(a)| < \varepsilon(c-a) + \varepsilon$ e isto vale para todo $\varepsilon > 0$, donde resulta que

$$F(c) = F(a) \qquad \forall c \in [a,b]$$

$\therefore$ F é constante. ✓

Terminamos esta exposição com o seguinte resultado:

Teorema → pag 234 Taylor

Uma função $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ é um integral indefinido, ie existe $f: I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f \, d\lambda$$

para todo $[a,b] \subset I$

sse

F é absolutamente contínua em I.

Prova: Exercício

A diferenciação de medidas

Nós já vimos no nosso curso, quando fizemos a construção da medida de Lebesgue na reta real $\mathbb{R}$ que dada $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona crescente e contínua à direita, se definirmos

F é uma função de Stieltjes

$$\mu_F(a,b] = F(b) - F(a)$$

então μ_F é não negativa e aditiva. Pelos teoremas de extensão, podemos definir μ_F aditiva na algebra gerada pelos intervalos da forma $(a,b]$. Na verdade μ_F é σ-aditiva e pode ser estendida à σ-algebra de Borel $\mathcal{B}$, e de facto, pelo teorema de extensão μ_F pode ser definida no completamento de $\mathcal{B}$ a que chamamos $\mathcal{L}_F$ (a classe dos conjuntos que são Lebesgue-Stieltjes mensuráveis.

Alem disso podemos verificar (da mesma forma que fizemos para a medida de Lebesgue) que μ_F é completa e $\mu_F: \mathcal{L}_F \to \mathbb{R}^+$ é regular.

Também já vimos, que dada uma função de distribuição

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

podemos definir uma medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F na σ-algebra $\mathcal{L}_F$. Alem disso $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$ e μ_F é completa, logo toda a função de distribuição determina uma medida de probabilidade e $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_F, \mu_F)$ é um espaço de probabilidade.

(acima podemos adaptar tudo para $(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}_F^k, \mu_F)$).

O seguinte resultado diz-nos que estas são as medidas de probabilidade interessantes em $\mathbb{R}^k$.

teo 4.8 pag 97 Taylor.

Teorema

Suponha que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra em $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ contém os conjuntos abertos e que $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ é uma medida completa, e que é finita em conjuntos limitados que pertencem a $\mathcal{F}$.

mon. cresc. + cont à direita

Então existe uma função de Stieltjes $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{L}_F$ e μ coincide com μ_F em $\mathcal{L}_F$.

Se $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de probabilidade então F pode ser escolhida de forma ser uma função de distribuição.

Prova: EXERCÍCIO !

Pela correspondência que temos do teorema anterior i.e

$$\mu \longleftrightarrow F$$

vamos poder obter propriedades de μ em termos das propriedades de F. Vamos então analisar μ tal que $\mu(a,b) < \infty \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

A esta medida μ podemos associar

$$F(x) = \begin{cases} \mu(0,x] \ ; & x \geq 0 \\ -\mu(x,0] \ ; & x \leq 0 \end{cases}$$

$F(0) = 0$

Afirmamos que : (1) $\forall x \leq y$ tem-se $F(x) \leq F(y)$ (F é monótona crescente)

(2) F é contínua à direita.

Prove as afirmações acima.

Como F é monótona, F tem limite à esquerda.

Se $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ então $\mu(\mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$

Reciprocamente se F é uma função monótona crescente e cont à direita sabemos associar-lhe a medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F.

Pelo Teorema acima, sabemos que existe uma relação entre medidas na reta que dão um peso finito a intervalos (a,b) e funções $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Já vimos exemplos de medidas discretas, absolutamente contínuas e singulares. Então a pergunta que nos fazemos agora é: como é que estas propriedades de μ, ie ser discreta, absolutamente contínua ou singular, se traduzem na função F que lhe está associada? Ou, reciprocamente, se F é, por exemplo, absolutamente contínua, o que é que isso significa para a medida que lhe está associada?

Lema 1 do Taylor pag 236

Lema: Seja μ_F a medida de Lebesgue-Stieltjes para $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é contínua à direita e monótona crescente.

Então F absolutamente contínua $\Longleftrightarrow$ μ_F absolutamente contínua com respeito à medida de

Lebesgue λ.

Prova:

$(\Longrightarrow)$ Se F é absolutamente contínua, então

$$\mu_F(a,b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f'(t)\,dt \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Pela σ-aditividade de μ_F e o teorema de extensão podemos concluir que $\mu_F(A) = \int_A f'(t)\,dt \;\; \forall A \in \mathcal{B}$.

E então sabemos que $\mu_F \ll \lambda$, pois $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu_F(A) = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Se $\mu_F \ll \lambda$ então pelo Teorema de Radon-Nikodym $\exists\, f = \frac{d\mu_F}{d\lambda}$ tal que

$$\mu_F(A) = \int_A \frac{d\mu_F}{d\lambda}\,d\lambda \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

Logo se $A = (y,x]$ temos $\mu_F(y,x] = \int_y^x f\,d\lambda$

Mas $\mu_F(y,x] = F(x) - F(y) = \int_y^x f\,d\lambda$

$\therefore$ F é absolutamente contínua. ✓

MEDIDAS ATÔMICAS:

Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ no qual $\mathcal{F}$ contém todos os conjuntos da forma $\{x\}$ com $x \in \Omega$.

Definição: x é um átomo de μ se $\mu(\{x\})>0$.

Afirmação: Se μ é σ-finita então o conjunto de atomos é numerável.

Prova: Como μ é σ-finita, sabemos que

$$\mathbb{R}=\bigcup_{j\geq 1} E_j \quad e \quad \mu(E_j)<\infty \quad \forall j$$

Vamos analisar o conjunto $\{x\in E_j;\ \mu(\{x\})\geq \frac{1}{n}\}$ para n fixado.

Ora

$$\# \left\{ x\in E_j : \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n} \right\} \leq n\,\mu(E_j)<\infty$$

Ora o conjunto $\{x\in E_j : \mu(\{x\})\geq \frac{1}{n}\}$ tem um nº finito de pontos.

Quando tomarmos a união em n e a união em j vamos ter um nº numerável de pontos:

$$\#\{x:\ \mu(\{x\})>0\} = \# \underbrace{\bigcup_{j\geq 1}\bigcup_{n\geq 1} \underbrace{\left\{x\in E_j : \mu(\{x\})\geq \frac{1}{n}\right\}}_{\text{finito}}}_{\text{numerável}}$$

Definição: μ diz-se uma medida discreta, se $\exists D$ numerável i.é $D=\{x_i,\ i\geq 1\}$ tal que $\forall A\in\mathcal{F}$

$$\mu(A)=\sum_{i:\,x_i\in A}\mu(\{x_i\}).$$

Definição: Seja $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. F diz-se uma função salto se $\exists$ D numerável tal que para $y<x$ se tem

$$F(x) - F(y) = \underbrace{\sum_{i : x_i \in (y,x]} p_i}_{\circledast} \quad \text{onde}$$

$\{p_i\}_{i\geq 1}$ é uma sucessão de nºs reais com $p_i > 0$. (a sucessão $\{p_i\}_{i\geq 1}$ é uma família de pesos.)

Observação: D pode ser denso ie F pode ter saltos por exemplo em $\mathbb{Q}$.

Observação: Seja $F(x_i^-)$ o limite à esquerda de F no ponto x_i. (que existe por F ser monótona crescente)

Então $F(x_i) - F(x_i^-) = p_i$

Lembremos que F é contínua à direita. F é contínua em $\mathbb{R} \setminus D = D^c$, e em D vai ser contínua à direita e em $x_i \in D$ vai ter um salto de tamanho p_i.

Observação: Em $\circledast$ estamos sempre a assumir que as medidas dão pesos finitos a intervalos (a,b), caso contrário em $\circledast$ a soma poderia não ser finita, e F valeria $+\infty$ a partir de um certo valor e queremos evitar essa situação. Note que apesar de D ser denso, a função F só será descontínua num conjunto numerável de pontos.

Lema 3 do Taylor pag 237

Lema: μ_F é uma medida discreta $\Longleftrightarrow$ F é uma função salto.

Prova: ($\Rightarrow$) Como μ_F é discreta, $\exists$ D conjunto numerável $D = \{x_i\}_{i\geq 1}$ e $\mu_F(A) = \sum_{i : x_i \in A} \mu_F(\{x_i\})$ $\forall A \in \mathcal{F}$.

Lembremos que $\{x_i\} \in \mathcal{B}$. Seja $p_i = \mu_F\{x_i\}$ e seja $A = (y, x]$.

Então

$$F(x) - F(y) = \mu_F(y,x] = \sum_{i : x_i \in (y,x]} \mu\{x_i\}$$

$$= \sum_{i : x_i \in (y,x]} p_i$$

$\therefore$ F é uma função salto.

($\Leftarrow$) Dada F função salto, sabemos que

$$F(x) - F(y) = \sum_{i : y < x_i \leq x} p_i$$

Seja $p_i = \mu_F\{x_i\}$ então obtemos

$$\mu_F(y,x] = \sum_{i : x_i \in (y,x]} p_i.$$

Seja agora $\nu(A) = \sum_{i : x_i \in A} p_i$.

Observa que $\nu(y,x] = \mu_F(y,x]$. Então as medidas μ_F e ν coincidem na semi-álgebra dos intervalos, e como são aditivas coincidem na álgebra gerada pela semi-álgebra.

Verifique que coincidem na σ-algebra gerada pela semi-álgebra ie $\mu_F = \nu$, e como ν é discreta, μ_F é discreta. ✓

Definição: μ é uma medida não atómica se $\mu\{x\} = 0 \ \forall x \in \Omega$.

Lema: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito no qual $\mathcal{F}$

contém todos os conjuntos singulares. Então μ pode ser <u>unicamente</u> decomposta como $\mu = \mu_1 + \mu_2$ onde μ_1 é discreta

Lema 2 do Taylor pag 237

μ_2 é não atômica.

<u>Prova</u>:

Seja $D \subseteq \Omega$ definida por $D = \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 0\}$, ie D é o conjunto dos átomos de μ. Já sabemos que D é no máximo numerável.

Suponha que $D = \{x_i\}_i$ e definimos a medida atômica μ_1 da seguinte forma

$$\mu_1(A) = \sum_{i : x_i \in A} \mu(\{x_i\})$$

μ_1 é discreta. Seja $\mu_2(A) = \mu(A) - \mu_1(A)$

$\mu_2(A) \geq 0$ pois $\mu_1(A) \leq \mu(A)$.

Por outro lado,

$$\mu_2(\{z\}) = \mu(\{z\}) - \mu_1(\{z\}).$$

Se $z \in D$ então $\mu_1(\{z\}) = \mu(\{z\})$ e portanto $\mu_2(\{z\}) = 0$, ie z não é átomo de μ_2.

Se $z \notin D$, então $\mu_2(\{z\}) = \mu(\{z\}) - \overset{=0}{\mu_1(\{z\})} = \mu(\{z\}) = 0$ porque z não é átomo de μ (lembre a definição de D).

$\therefore$ $\forall z$ $\mu_2(\{z\}) = 0$ e portanto μ_2 não tem átomos.

Então concluímos que $\mu = \underset{\text{atômica}}{\mu_1} + \underset{\text{não atômica}}{\mu_2}$ ☺

Falta ver que a decomposição é única. Suponhamos que

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

μ_1 e μ_3 são atómicas

μ_2 e μ_4 são não atómicas

Então $\mu_1(\{z\}) = \mu_3(\{z\})$ $\forall x$ e como μ_1 e μ_3 são atomicas

$\mu_1 \equiv \mu_3$ pois a medida de um conjúnto é a soma do peso dos elementos que o compõe.

Como $\mu_1 \equiv \mu_3$ então $\mu_2 \equiv \mu_4$ e terminá a prova.

Lema 4 do Taylor pag 238

Lema: μ_F não é atómica $\Longleftrightarrow$ F é contínua.

Prova: ($\Rightarrow$) μ_F não é atomica, logo $\mu_F(\{x\}) = 0$ $\forall x$.

Ora por hipótese já sabemos que F é contínua à direita, só falta então ver que F é contínua à esquerda.

Se $x \geq 0$, $\mu_F(x-h, x] = F(x) - F(x-h)$.

$(x-h, x] \downarrow_{h \downarrow 0} \{x\}$ e como μ_F é σ-finita, pela continuidade por cima temos $\mu_F((x-h, x]) \longrightarrow \mu_F(\{x\}) = 0$

$\mu_F((x-h,x]) = F(x) - F(x-h)$

ie $\lim_{h \to 0} F(x) - F(x-h) = 0$ ie F é contínua à esquerda.

$\therefore$ F é contínua.

($\Leftarrow$) é analoga, basta partir da continuidade de F. (exercício).

Observemos que dada μ sabemos que

$\mu = \mu_1 + \mu_2$ e μ_1 é atómica logo corresponde a F_1 função salto e μ_2 é não atómica e portanto corresponde a F_2 função contínua.

Agora na parte contínua queremos extrair a parte absolutamente contínua. Se F_2 é diferenciável q.c. então definimos

$$G(x) = \int_0^x F_2' \, d\lambda$$

$G(x)$ é absolutamente contínua e $H(x) = (F_2 - G)(x)$

A função H é contínua porque F_2 é contínua e G é absolutamente contínua (em particular é contínua).

<u>H é monótona:</u>

$$\text{Se } x \leq y, \quad H(x) - H(y)$$

$$= F_2(x) - F_2(y) \underbrace{- (G(x) - G(y))}_{= +G(y) - G(x) = \underbrace{\int_x^y F_2' \, d\lambda}_{\leq F_2(y) - F_2(x)}}$$

por um resultado que já vimos antes

$$\leq F_2(x) - F_2(y) + F_2(y) - F_2(x) = 0$$

$$H' = F_2' - G' = F_2' - F_2' = 0$$

H monótona, H contínua, $H' = 0$ q.c. (esta função vai ser singular)

Então $\mu_2 = \mu_{ac} + \mu_s$

med. abs. cont $\to F_{ac}$; medida singular $\to F_s$.

Então temos assim a chamada DECOMPOSIÇÃO DE LEBESGUE da medida μ ie

$$\mu = (\text{SINGULAR}) + (\text{ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA})$$

SINGULAR: μ_d discreta, μ_s contínua; ABSOLUTAMENTE CONTÍNUA: μ_{ac}

Vamos então definir função singular.

Definição: $F: I \to \mathbb{R}$ contínua, monótona crescente com $F' = 0$ λqc em I diz-se SINGULAR.

lema 5 pag 238 Taylor

Lema: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é singular sse μ_F é não atómica e $\mu_F \perp \lambda$.

Prova: Já vimos acima a relação entre F ser contínua e μ não ser atómica. Falta relacionar $F' = 0$ q.c. com $\mu_F \perp \lambda$ (ie μ_F ser singular com respeito a λ).

OBSERVAÇÃO $\nu \perp \lambda \iff \forall\, \tau \ll \lambda$ e se $\tau(E) \leq \nu(E)\ \forall E \in \mathcal{F}$
$\Rightarrow \tau \equiv 0$.

Provemos a observação: se $\nu \perp \lambda$ então se $\nu(A) = 0$ então $\lambda(A^c) = 0$.

Seja $\tau \ll \lambda$ tal que $\tau(E) \leq \nu(E)$ $\forall E \in \mathcal{F}$. Queremos provar que $\tau \equiv 0$.

Seja $E \in \mathcal{F}$ qualquer. Então

$$\tau(E) = \underbrace{\tau(E \cap A)}_{\leq \nu(E \cap A)} + \tau(E \cap \underbrace{A^c}_{\leq A^c})$$

$$\leq \underbrace{\nu(E \cap A)}_{\leq \nu(A) = 0}$$

como $\tau \ll \lambda$ então

como $\lambda(A^c) = 0 \Rightarrow \tau(E \cap A^c) = 0$

$\therefore \tau(E) = 0, \forall E$ ✓

($\Leftarrow$) Vamos supor que $\forall \tau \ll \lambda$, tq $\tau(E) \leq \nu(E)$ $\forall E \to \tau = 0$.

Queremos ver que $\nu \perp \lambda$.

Pelo teorema de Radon-Nikodym sabemos que

$$(*) \quad \nu = \nu_s + \nu_{ac}$$

$\nu_{ac} \to$ abs. cont. com respeito a λ

$\nu_s \to$ singular com respeito a λ.

Mas $\nu_{ac} \ll \lambda$ e $\nu_{ac}(E) \leq \nu(E)$ (por definição). Então pela hipótese (já que ν_{ac} satisfaz as propriedades de τ) temos que $\nu_{ac} = 0$ e de $(*)$ resulta que $\nu = \nu_s$, ie ν é singular com respeito a λ. ✓

Vamos provar então o lema.

($\Leftarrow$) Sabemos que $\mu_F \perp \lambda$. Se $F'(x) > 0$ num conjunto de medida λ positivo, definimos $\tau(E) = \int_E F' \, d\lambda$.

se isso não acontecesse $\tau \equiv 0$, vamos evitar esse caso

Ora $\tau(y,x] = \int_y^x F' \, d\lambda \leq F(x) - F(y) = \mu_F(y,x]$.

Então $\tau \leq \mu_F$ e $\tau \ll \lambda$. Pela observação anterior $\tau \equiv 0$.

Logo $\int_E F' \, d\lambda = 0 \;\; \forall E \Rightarrow F' = 0$ q.c.

$\therefore$ F é singular.

($\Longrightarrow$) Vamos supor por redução ao absurdo que μ_F não é singular com respeito à medida de Lebesgue. Pela observação $\exists\, \tau$ tal que $\tau \ll \lambda$ e $\tau(E) \leq \mu_F(E) \; \forall E \in \mathcal{F}$ mas $\tau \not\equiv 0$.

Se $\tau \ll \lambda$ então $\tau(E) = \int_E f \, d\lambda$ onde $f = \frac{d\tau}{d\lambda}$

Mas $\tau(E) \leq \mu_F(E), \; \forall E \in \mathcal{F}$.

Então, $E = (a,b]$, $F(b) - F(a) = \mu_F(a,b] \geq \int_a^b f \, d\lambda := G(b) - G(a)$ e $G' = f$ q.c.

Logo $F(b) - F(a) \geq G(b) - G(a)$ e se ambas as derivadas existem no ponto a, temos $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \geq \frac{G(b)-G(a)}{b-a}$ e fazendo $b \to a$ temos $F'(a) \geq G'(a)$ q.c.

Mas daqui resulta que $F' \geq f$ q.c.

justificação

Como $\tau \not\equiv 0$, então a função f tem de ser estritamente positiva num conjunto de medida positiva:

$$\tau(E) = \int_E f \, d\lambda \quad \text{e} \quad \lambda\{x : f(x) > 0\} > 0$$

$\therefore \exists\, \delta$ tq $\lambda\{x : f(x) > \delta\} > 0$

Mas $F' \geq f > 0$ e $F' = 0$. Absurdo!

Terminámos esta exposição com o teorema de Lebesgue que nos diz o seguinte

teorema 9.5 Taylor pag 239

Teorema (LEBESGUE)

Dada uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona crescente e contínua à direita, existe uma decomposição de F da seguinte forma

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

onde F_1 é uma função salto

F_2 é singular

F_3 é absolutamente contínua.

Alem disso, se $F_1(0) = F_2(0) = 0$ a decomposição é única.

Prova: (EXERCÍCIO).

A função de Cantor e o conjunto de Cantor

Estamos de volta ao capítulo 2.7 $\to$ pag 49 do livro do Taylor e vamos analisar um conj. muito conhecido em teoria da medida que é o conjunto de Cantor. Este exemplo vai muitas vezes ser usado para provar que certas conjeturas são falsas. Vamos então definir o conjunto de CANTOR.

Seja $x \in [0,1]$ e suponhamos que escrevemos x como

$$x = \sum_{j \geq 1} \frac{x_j}{3^j} \quad \text{com} \quad x_j \in \{0,1,2\}$$

ou seja estamos a escrever o número x na base 3.

Observemos que há uma ambiguidade na identidade acima pois note que se temos $x = 0{,}x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n 222$ também podemos expressar x como $x = 0{,}x_1 x_2 \ldots x_{n-1} (x_n+1)\, 0 \ldots 0$

(Verifique que dá o mesmo número).

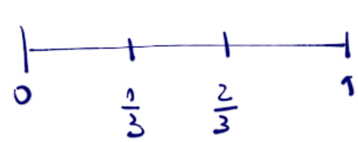
Vamos denotar o conjunto de CANTOR por K e note que

K = conjunto de Cantor $\subseteq [0,1]$

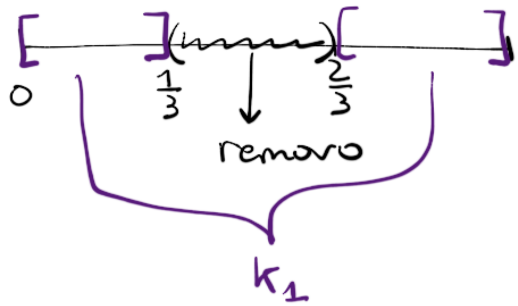
A maneira de construir o conjunto K consiste em fazer o seguinte

tome

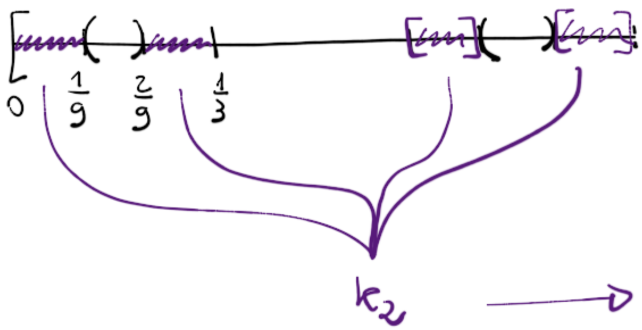
e divida em 3 partes iguais



remova o intervalo aberto central e seja K_1 o que sobra



Repetimos o procedimento em cada intervalo de K_1.



$\longrightarrow$ 4 intervalos

Definimos $K = \bigcap_{j \geq 1} K_j$.

K_j é compacto $\Longrightarrow$ K é compacto.

$K_j \neq \emptyset \Longrightarrow K \neq \emptyset$

K_j são decrescentes

Vamos definir este conjunto formalmente.

$[0] \subseteq [0,1]$, este é o conj em que os pontos são da forma $0.0x_2x_3\ldots$

$$[0] = \{ x \in [0,1] : x = 0,0x_2x_3\ldots \}$$

ie $[0] = \{ x \in [0,1] : x_1 = 0 \}$

Então $x = \frac{0}{3} + \sum_{j \geq 2} x_j / 3^j$

Ora $\displaystyle\sum_{j\geq 2} \frac{x_j}{3^j} = \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{j\geq 1} \frac{x_{j+1}}{3^j}}_{\text{são todos os pontos de } [0,1]}$

$\therefore\ [0] = [0, 1/3]$

Analogamente $[2] = \{x \in [0,1] : x_1 = 2\}$

$$x \in [2] \Rightarrow x = \frac{2}{3} + \sum_{j\geq 2} \frac{x_j}{3^j}$$

$$\sum_{j\geq 2} \frac{x_j}{3^j} = \frac{1}{3}\sum_{j\geq 1} \frac{x_{j+1}}{3^j}$$

$$= \frac{2}{3} + [0, 1/3] = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$\therefore\ K_1 = [0] \cup [2]$.

Vamos definir K_2. Ora introduzimos a seguinte notação $[a_1 a_2] = \left\{x \in [0,1] : \begin{array}{l} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \end{array}\right\}$

$$K_2 = [0\,0] \cup [0\,2] \cup [2\,0] \cup [2\,2]$$

Vamos analisar $[0\,2]$

Ora $[0\,2] = \left\{x \in [0,1] : \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\}$

$$x = \frac{0}{3} + \frac{2}{9} + \sum_{j\geq 3} \frac{x_j}{3^j} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\overbrace{\sum_{j\geq 1} \frac{x_{j+2}}{3^j}}^{=\,[0,1]} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}[0,1]$$

$$= \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$$

E continuamos assim sucessivamente.

Ora $K_N = \bigcup_{a_1, \dots, a_N \in \{0,2\}} [a_1 \dots a_N]$

onde $[a_1 \dots a_N] = \{ x \in [0,1] : x_j = a_j \quad \forall\, 1 \leq j \leq N \}$

Observe que os conjuntos K_j decrescem.

$K_j \neq \emptyset$.

Seja $K = \bigcap_{N \geq 1} K_N \neq \emptyset$. A intersecção de compactos não vazios é um compacto não vazio.

$\boxed{\text{Afirmamos que } \lambda(K) = 0}$

Ora $\lambda(K_1) = 2 \times \frac{1}{3}$ (2 intervalos disjuntos com comprimento $\frac{1}{3}$)

$\lambda(K_2) = 4 \times \frac{1}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\vdots$

$\lambda(K_N) = 2^N \times \frac{1}{3^N} = \left(\frac{2}{3}\right)^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

$\therefore \lambda(K) = \lambda\left(\bigcap_{N \geq 1} K_N \right) = \lim_N \lambda(K_N) = 0.$

$\therefore \lambda(K) = 0$ O conj de Cantor tem medida de Lebesgue nula.

- K é não numerável.

Ora $x \in K \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} x_j \in \{0,2\}$

Vamos provar a equivalência acima.

Seja $x \in K$. Então $x \in K_N$ para N muito grande. Logo $x_1 \dots x_N \in \{0,2\}$

Por outro lado, se $x \in [0,1]$ com $x_j \in \{0,2\}$ $\forall j$, então $x \in K_N$ $\forall N$ e portanto $x \in \bigcap_N K_N = K$.

Isto mostra que se $x \in K \Leftrightarrow x_j \in \{0,2\}$.

Seja agora

$$\phi : K \to [0,1]$$
$$0,x_1x_2\dots \longrightarrow 0,\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\dots$$

* ϕ é bijetiva e portanto K é não numerável

Acabamos assim de encontrar um conjeinto não numerável com medida de Lebesgue igual a zero.

Vamos agora definir uma função usando esta construção.

Seja então:

$$E_N = [0,1] \setminus K_N = \text{união de conjuntos abertos}$$

e $E = [0,1] \setminus K$. Ora $E_N \uparrow E$, e

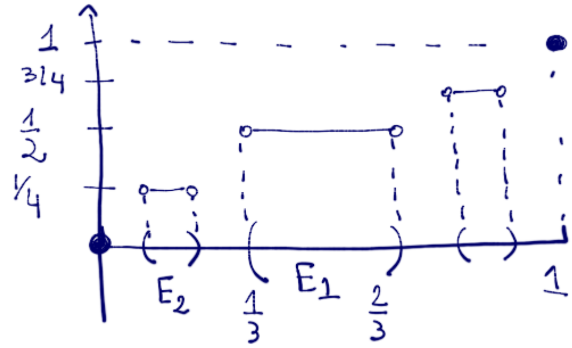
$$\lambda(E) = \lambda([0,1]) - \lambda(K) = 1 - 0 = 1$$

FUNÇÃO DE CANTOR

Queremos construir uma função $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$, monótona crescente e contínua. Sabemos que a sua derivada existe q.c, mas queremos $f' = 0$ q.c. e

$f(0)=0$ e $f(1)=1$. $\therefore$ f não é constante.

Fazemos como na figura



e continuamos assim o procedimento.

Ora $f'=0$ no conj E_N, para todo N, logo

$f'=0$ no conj $\bigcup_N E_N = E$ e $\lambda(E)=1$.

Se provarmos que f é contínua teremos aqui um exemplo de uma função tal que $f'=0$ q.c. mas f não é constante.

Lembre que $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ e $x_j \in \{0,1,2\}$

Seja $N(x) = \min \underbrace{\{ j \geq 1 : x_j = 1 \}}_{A}$. Quando o conjunto A for igual ao ϕ definimos $\min(\phi) = +\infty$.

Observa que como um ponto pode ter duas representações

ie $x = 0,1\,2\,2\ldots \rightsquigarrow N(x)=1$

mas $x = 0,2\,0\,0\ldots$ então $N(x) = +\infty$.

$= \frac{2}{3}$ ✓

$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j}}$

$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Então quando definimos $N(x)$ temos de ter cuidado para que não haja ambiguidade na definição de $N(x)$ como acabou de acontecer no exemplo atrás.

Vamos definir a função f da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N(x)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{\{x_j \geq 1\}}$$

$\boxed{*}$ Note que apesar de $N(x)$ não estar bem definido, a função f vai estar bem definida.

A ambiguidade vem de $X = 0.x_1 x_2 \ldots x_N\, 2\, 2 \ldots$ e termos também

$\in \{0,1\}$

$$X = 0.x_1 \ldots x_{N-1}(x_N+1)\,0\ldots 0$$

Vamos ver que a definição de f não se altera.

Observa os 1os $(N-1)$ pontos. Estes pontos são iguais, logo se um deles é 1 esse vai ser o valor que define $N(x)$ e será o mesmo valor. Mas agora vamos ver o caso que nenhum dos $x_j = 1$.

temos de ter $x_j = 2$

1) Supõe que $X_N = 0$.

Então
$$f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2^j}\, \mathbb{1}(X_j = 2) + \underbrace{\sum_{j \geq N+1} \frac{1}{2^j}}_{1/2^N}$$

$$\therefore\ f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2^j}\, \mathbb{1}\{X_j = 2\} + \frac{1}{2^N}$$

na 2ª representação temos:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2^j}\, \mathbb{1}\{X_j = 2\} + \frac{1}{2^N}$$

e as expressões são iguais, ie $f(x)$ não depende da representação de x.

2) Suponha que $X_N = 1$.

Ora $X = 0.x_1 \ldots x_N\, 222\ldots$ e $X = 0,x_1 \ldots x_{N-1}(x_N+1)\, 0\ldots 0$

Nesta representação temos: $f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2^j}\, \mathbb{1}\{X_j = 2\} + \frac{1}{2^N}$.

Na 2ª representação temos:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{\{x_j = 2\}} + \frac{1}{2^N}$$

e portanto f está bem definida, apesar de $N(x)$ não estar bem definido.

(1) f é monótona crescente.

Seja $x<y$. Vamos ver que $f(x) \leq f(y)$

$x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots x_M x_{M+1}$

$y = 0.y_1 y_2 y_3 \ldots y_M y_{M+1}$

M é escolhido de tal modo que os x_i e y_i coincidem.

e $x_i = y_i \; \forall i = 1 \ldots M$. Como $x<y$ então $x_{M+1} < y_{M+1}$.

Se tivessemos $x_{M+1} > y_{M+1}$ por exemplo $x_{M+1} = 1$ e $y_{M+1} = 0$

e escolhemos o pior caso, ie

$x = 0.x_1 \ldots x_M\, 1\, 0\, 0 \ldots$

$y = 0.x_1 \ldots x_M\, 0\, 2\, 2 \ldots$

Mas neste caso $x=y$, o que é impossível!

Se existe um 1 em $x_1 \ldots x_M$ então $f(x) = f(y)$.

Assumimos então $x_1, x_2 \ldots x_M \in \{0, 2\}$.

Seja $$I = \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{\{x_j \geq 1\}}$$

e agora vamos considerar vários casos. Por exemplo

$x_{M+1} = 0$; $y_{M+1} = 1$ e

$$x = 0.x_1 \ldots x_M \boxed{0}$$
$$y = 0.y_1 \ldots y_M \boxed{1}$$

depois vamos ver $\begin{array}{l} x = 0.x_1 \ldots x_M \boxed{0} \\ y = 0.y_1 \ldots y_M \boxed{2} \end{array}$ e depois ... $\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}}$

$$f(x) = I + \sum_{j \geq M+2}^{N(x)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{\{x_j \geq 1\}}$$

$$\leq I + \sum_{j \geq M+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{x_j \geq 1} \leq I + \frac{1}{2^{M+1}}$$

$$f(y) = I + \frac{1}{2^{M+1}}$$

$N(y) = N+1$ e portanto $f(x) \leq f(y)$.

No 2º caso para x fica tudo igual.

Para y temos $N(y) \geq M+2$

$$f(y) \geq I + \frac{1}{2^{M+1}} \geq f(x)$$ e também vale o que queremos.

Falta o último caso:

$N(x) = M+1$ $\qquad f(x) = I + \frac{1}{2^{M+1}} \leq f(y)$.

e pronto

$\therefore$ f é monótona crescente.

(2) f é contínua! Ora $f(x) = \sum_{j=1}^{N(x)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{\{x_j \geq 1\}}$.

Seja $0 \leq x < y \leq 1$ e assuma que $y - x \leq \frac{1}{3^N}$. Vamos mostrar que $f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^N}$. Escrevemos

$$x = 0.x_1 \dots x_M \; x_{M+1}$$
$$\,\shortparallel \quad\; \shortparallel \quad\;\; \wedge$$
$$y = 0.y_1 \dots y_M \; y_{M+1}$$

isto tem que acontecer porque $x < y$.

Assuma que $M \geq N$. Então

$f(y) - f(x) = 0$ basta que $x_j = 1$ para algum $j = 1, \dots, N$.

Suponhamos então que $x_j \neq 1$ $\forall j \in \{1, \dots, N\}$.

$$f(y) - f(x) = \cancel{I} - \cancel{I} + \sum_{j=M+1}^{N(y)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{\{y_j \geq 1\}} - \sum_{j=M+1}^{N(x)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{\{x_j \geq 1\}}.$$

Vamos limitar pelo pior caso

$$\leq \frac{1}{2^M} - 0 = \frac{1}{2^M} \leq \frac{1}{2^N}$$

$$\therefore f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^N}$$

Falta o caso $M < N$. Como $y - x < \frac{1}{3^N}$ então temos que ter:

$$x = 0.x_1 \dots x_M \, x_{M+1} \, 2 \dots 2$$
$$\wedge$$
$$y = 0.y_1 \dots y_M \, y_{M+1} \, 0 \dots 0$$

Há três hipóteses para o par (x_{M+1}, y_{M+1}) ie $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix}$.

Vamos começar por $\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}}$

Ora $\frac{1}{3^N} > y - x = ? = \frac{1}{3^{M+1}} + \sum_{j \geq M+2} \frac{\overbrace{y_j}^{\geq 0}}{3^j} - \sum_{j \geq M+2} \frac{x_j}{3^j}$

↓ deito fora

$$= \underbrace{\sum_{j \geq M+2} \frac{2}{3^j}}_{\|} - \sum_{j \geq M+2} \frac{x_j}{3^j}$$

$$= \sum_{j \geq M+2} \frac{2 - x_j}{3^j}$$

Se $x_j \neq 2$ para $M+2 \leq j \leq N$ então vamos ter

$\frac{1}{3^N} > \frac{1}{3^N} + \dots + \text{termos}.$

↑ por exemplo $\frac{2-1}{3^N} = \frac{1}{3^N}$ e a desigualdade é estrita!

Então temos de ter $x_j = 2$ $\forall j \in \{M+2, \dots, N\}$.

Então no caso 1 temos, caso 2 temos

$$\left. \begin{array}{l} x = 0.x_1 \dots x_M \boxed{0 \; 1} \; 2 \;\; 2 \dots . \;\; 2 \\ y = 0.y_1 \dots y_M \boxed{1 \; 2} \; 0 \; \dots\dots \;\; 0 \end{array} \right\} \text{caso 1.}$$

mas agora só vamos ter zeros pois:

$$\frac{1}{3^N} > y - x = \frac{2}{3^{M+1}} - \frac{1}{3^{M+1}} + \sum_{j \geq M+2} \frac{y_j}{3^j} - \underbrace{\sum_{j \geq M+2} \frac{x_j}{3^j}}_{\leq \sum_{j \geq M+2} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^{M+1}}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{3^{M+1}}} - \cancel{\frac{1}{3^{M+1}}} + \sum_{j \geq M+2} \frac{y_j}{3^j}$$

Se um dos y_j é 1 ou 2 para $j \in \{M+2, \dots, N\}$ então a desigualdade estrita é falsa.

Logo $y_j = 0 \quad \forall j \in \{M+2, \dots N\}$

Vamos ao terceiro caso ié $x_{M+1} = 0$ e $y_{M+1} = 2$.

$$\frac{1}{3^N} > y - x = \frac{2}{3^{M+1}} + \sum_{j \geq M+2} \frac{y_j}{3^j} - \underbrace{\sum_{j \geq M+2} \frac{x_j}{3^j}}_{\leq \sum_{j \geq M+2} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^{M+1}}}$$

$$\geq \frac{2}{3^{M+1}} - \frac{1}{3^{M+1}}$$

$$= \frac{1}{3^{M+1}}$$

e $M < N \quad \therefore \quad \frac{1}{3^N} < \frac{1}{3^{M+1}}$ é <u>impossível !</u>

Basta vermos então o caso 1 e 2.

Ora $f(x) = \sum_{j=1}^{N(x)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}\{x_j \geq 1\}$

<u>CASO 1</u>: $f(y) - f(x) = \frac{1}{2^{M+1}} - \sum_{j=M+2}^{N} \frac{1}{2^j} - \cancel{\sum_{j=N+1}^{N(x)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}\{x_j \geq 1\}}$

$$= \sum_{j \geq M+2} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=M+2}^{N} \frac{1}{2^j}$$

$$= \sum_{j \geq N+1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^N} \quad \checkmark$$

<u>CASO 2</u> $f(y) - f(y) = \cancel{\frac{1}{2^{M+1}}} + \sum_{j=N+1}^{N(y)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}\{y_j \geq 1\}$

$$- \cancel{\frac{1}{2^{M+1}}} \qquad \leq \sum_{j \geq N+1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^N} \; \checkmark$$

Agora podemos provar a continuidade de f. (Hölder contínua!)

Sabemos que $0 \leq x < y \leq 1$ e $y - x < 1/3^N \Rightarrow f(y) - f(x) < \frac{1}{2^N}$.

Fixa $0 \leq x < y \leq 1$ e escolha $N \geq 0$ t.q.

$$\frac{1}{3^{N+1}} < y - x \leq \frac{1}{3^N}$$

ie $$3^N < \frac{1}{y-x} < 3^{N+1}$$

$$\therefore \; N \leq \frac{\log\left(\frac{1}{y-x}\right)}{\log(3)} < N+1.$$

Ora $$0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^N} = \frac{1}{e^{N\log(2)}}$$

Mas $$N \geq \frac{\log\left(\frac{1}{y-x}\right)}{\log(3)} - 1$$

$$\leq \frac{1}{e^{\log(2)\cdot\left[\frac{\log\left(\frac{1}{y-x}\right)}{\log 3} - 1\right]}}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{1}{y-x}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}}}$$

Assim obtemos $0 \leq f(y) - f(x) \leq 2\,|y-x|^{\frac{\log 2}{\log 3}}$

$\therefore$ f é Hölder contínua com parâmetro $\frac{\log 2}{\log 3}$ o que prova a continuidade de f.

Ora, nos conjuntos

$$E_N = [0,1] \setminus K_N \quad \text{onde} \quad K_N = \bigcup_{[a_1 \dots a_N] \in \{0,2\}} [a_1 \dots a_N]$$

temos

$$[a_1 \dots a_N] = \{ x : \underset{1 \leq j \leq N}{x_j = a_j} \}$$

Então $E_N = \underbrace{[1]^\circ}_{} \cup [0\,1]^\circ \cup [2\,1]^\circ \cup \dots \cup \underset{b_j \in \{0,2\}}{[b_1 \dots b_{N-1}\ 1]^\circ}$

abertos

estes conjuntos são fechados e consideramos o interior.

Verificar que o conjunto E_N pode ser escrito como esta união.

f é constante em E_N.

Seja $x \in [b_1 \dots b_{N-1}\ 1]$, com $b_j \neq 1\ \forall j \in \{1, \dots, N-1\}$ ie $b_j \in \{0,2\}$.

Ora $N(x) = N$ e portanto

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}\{b_j = 2\} + \frac{1}{2^N}$$

E agora observamos que f não depende de x, somente dos b_j para $j \in \{1, \dots, N-1\}$.

$\therefore f' = 0$ em E_N, $\forall N$.

$\therefore f' = 0$ em $\bigcup_N E_N = E$ e sabemos que $\lambda(E) = 1$.

$f' = 0$ a.e.

e portanto

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N(x)} \frac{1}{2^j} \mathbb{1}_{x_j \geq 1}$$

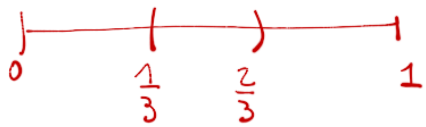
é monotona crescente

contínua

$f' = 0$ q.e.

} f é singular.

Há várias maneiras de fazer esta construção.
Vamos agora ver outra maneira de o fazer.
De novo começamos com a construção do conjunto de Cantor



1º passo removemos o intervalo central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

2º passo removemos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ e por assim em diante.

Ao fim de n passos removemos

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

intervalos abertos disjuntos e ficamos com 2^n intervalos disjuntos fechados com tamanho $\frac{1}{3^n}$.

Vamos denotar os intervalos removidos, da esquerda para a direita por $J_{n,k}$ onde $k = 1, \dots, 2^n - 1$ e seja U_n a sua união

ie $\quad U_n = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_{n,k}$

Então $\lambda(U_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$U_n \uparrow U$ e o conjunto U^c é o conjunto de Cantor K.

Ora $\lambda(K) = 1 - \lambda(U) = 1 - \lim_n \lambda(U_n) = 1 - 1 = 0$

$\therefore$ Como já vimos acima a medida de Lebesgue do conjunto de Cantor é igual a zero. Para cada n e k definimos

$$c_{n,k} = k/2^n.$$

Vamos definir F em U da seguinte forma

$$F(x) = c_{n,k} \quad \text{se} \quad x \in J_{n,k}$$

O valor de F é constante em cada intervalo $J_{n,k}$ e é estritamente maior em qualquer intervalo $J_{n',k'}$ que fique à direita de $J_{n,k}$

- F é crescente
- $\lim_{x \to 0} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to 1} F(x) = 1$

e para definirmos uma função $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fazemos o seguinte

$F(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$

$F(x) = 1 \quad \forall x \geq 1$

Até aqui temos F definida no conjunto

$$(-\infty, 0] \cup U \cup [1, +\infty)$$

e neste conjunto é crescente.

Observa que cada conjunto $J_{n,k}$ está a uma distância $\geq \frac{1}{3^n}$ de outro $J_{n,k'}$ e a variação de F nos 2^n intervalos disjuntos é menor ou igual a $1/2^n$ ie

$$0 \leq x - x' \leq \frac{1}{3^n} \Rightarrow F(x) - F(x') \leq \frac{1}{2^n}.$$

Logo F é uniformemente contínua em D.

observação:

Seja f uma função crescente definida em D e seja $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \inf_{x < t \in D} f(t)$$

Note que $\tilde{f}$ é crescente e contínua à direita. Alem disso, se f é uniformemente contínua então $\tilde{f}$ também o é.

Por esta observação $\exists \tilde{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua e F é constante em $J_{n,k}$, logo $\tilde{F}' = 0$ em U e também em $(-\infty, +\infty) \setminus C$

$\therefore \tilde{F}$ é singular
