Teoremas do Limite Central

Convergência para as Distribuições Normal e Poisson

Camila Cruz | 87782
Mafalda Clara | 78388

Mestrado em Matemática e Aplicações - Estatística
Instituto Superior Técnico

14 de Dezembro de 2017

Índice

Caso particular do Teorema do Limite Central

Teorema 1

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d, tal que:

- $E[X_i] = \mu$;
- $Var(X_i) = \sigma^2$.

Se $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, então:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Teorema 2 - Teorema de De Moivre-Laplace

Se $a < b$ então quando $m \to \infty$

$$P\left(a \leq \frac{S_m}{\sqrt{m}} \leq b\right) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Caso Particular

Exemplo

Atira-se ao ar uma moeda e coloca-se em jogo 1 euro. Sabemos que a probabilidade de sair cara ou coroa é igual e que cada uma das jogadas é independente das restantes. Assim, sejam $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. com $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$ e seja $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Assim, temos que X_i é o ganho na jogada i e S_n é o ganho ao fim de n jogadas. Se n e k são inteiros

$$P\left(S_{2n} = 2k\right) = \binom{2n}{n+k} 2^{-2n}$$

desde que $S_{2n} = 2k$ se e só se $n + k$ jogadas são +1 e $n - k$ jogadas são -1 nas 2n jogadas.

Notas:

- $P\left(S_{2n} = 2k + 1\right) = 0$
- $S_{2n+1} = S_{2n} \pm 1$

O objectivo é obter

$$P\left(a \leq \frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq b\right) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

onde $a < b$.

Caso Particular

Iremos calcular:

$$P\left(a\sqrt{2n} \leq S_{2n} \leq b\sqrt{2n}\right)$$

(equivalente ao objectivo apresentado anteriormente) e, para tal, precisaremos dos seguintes resultados:

Fórmula de Stirling's

A fórmula de Stirling's diz-nos que:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

quando $n \to \infty$.

Lema 1

Se $c_j \to \infty$, $a_j \to \infty$ e $a_j c_j \to \lambda$ então $\left(1 + c_j\right)^{a_j} \to e^{\lambda}$.

A partir da fórmula de Stirling's, obtemos:

$$P(S_{2n} = 2k) = \begin{pmatrix} 2n \\ n+k \end{pmatrix} 2^{-2n} \sim$$

$$\sim \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^{-n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k} (\pi n)^{-1/2} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-1/2}$$

Caso Particular

Lema 1

Se $c_j \to \infty$, $a_j \to \infty$ e $a_j c_j \to \lambda$ então $(1 + c_j)^{a_j} \to e^\lambda$.

Agora, a partir do lema 1, e considerando $k = x\sqrt{n/2}$ resulta:

- $\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^{-n} \to e^{x^2/2}$
- $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \to e^{-x^2/2}$
- $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k} \to e^{-x^2/2}$

E para o k escolhido, temos que $k/n \to 0$, logo: $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-1/2} \to 1$.

Portanto, $P(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} 2^{-2n} \sim (\pi n)^{-1/2} e^{-x^2/2}$.

Caso Particular

Assim, $P\left(a\sqrt{2n} \leq S_{2n} \leq b\sqrt{2n}\right) = \sum_{m \in \left[a\sqrt{2n}, b\sqrt{2n}\right] \cap 2\mathbb{Z}} P\left(S_{2n} = m\right)$.
Fazendo mudança de variáveis, $m = x\sqrt{2n}$:
$P\left(a\sqrt{2n} \leq S_{2n} \leq b\sqrt{2n}\right) =$
$= \sum_{m \in \left[a\sqrt{2n}, b\sqrt{2n}\right] \cap 2\mathbb{Z}} P\left(S_{2n} = m\right) \approx$
$\approx \sum_{x \in [a,b] \cap (2\mathbb{Z}/\sqrt{2n})} (2\pi)^{-1/2} e^{x^2/2}(2/n)^{1/2} \approx$
$\approx \int_a^b (2\pi)^{-1/2} e^{x^2/2} dx$
A função integranda é a densidade da distribuição normal, logo obtemos o desejado:

$$P\left(a \leq \frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} \leq b\right) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Teorema do Limite Central para sequências i.i.d.

Teorema 3

Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias i.i.d., tal que:

- $E[X_i] = \mu$;
- $Var(X_i) = \sigma^2$.

Se $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, então:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Lema 2

Se $c_j \to 0$, $a_j \to \infty$ e $a_j c_j \to \lambda$ então:

$$(1 + c_j)^{a_j} \to e^{\lambda}$$

Teorema 4

Se $E\left[|X^k|\right] < \infty$, então:

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{i^j}{j!} m^j t^j + o(|t|^k)$$

Teorema do Limite Central para sequências i.i.d.

Teorema 5

Se $c_n \to c \in \mathbb{C}$, então:

$$(1 + \frac{c_n}{n})^n \to e^c$$

Para a demonstração deste teorema, é necessário enunciar os seguintes Lemas:

Lema 3

Sejam $z_1, \ldots z_n$ e $w_1 \ldots w_n$, números complexos de módulo igual ou inferior a θ. Então:

$$\left| \prod_{m=1}^{n} z_m - \prod_{m=1}^{n} w_m \right| \leq \theta^{n-1} \sum_{m=1}^{n} |z_m - w_m|$$

Lema 4

Se b é um número complexo tal que $|b| \leq 1$, então: $\left|e^b - (1+b)\right| \leq |b|^2$

Teorema do Limite central para sequências i.i.d.

Exemplo - Roleta

Uma roleta está dividida em partes numeradas de 1 a 36 sendo 18 vermelhas e 18 pretas. Para além destas tem ainda duas partes numeradas com 0 e 00 de cor verde.

Os jogadores podem apostar 1 euro em como a bola acerta numa fatia vermelha ou preta e ganham 1 euro se a sua aposta se verificar.

Teorema do Limite Central para sequências i.i.d.

Exemplo - Roleta

Seja X_i a quantia, em euros, ganha na i-ésima jogada.
$X_i, \dots X_n$ são variáveis aleatórias i.i.d que seguem a seguinte distribuição:

$$P(X_i = 1) = \frac{18}{38}; P(X_i = -1) = \frac{20}{38}$$

Pelo que:

$$E[X_i] = \frac{-1}{19}; Var(X_i) = 0.9972$$

Seja S_n a variável aleatória que representa a quantia, em euros, ganha ao fim de n jogadas.
Queremos que $S_n \geq 0$

Teorema do Limite Central para sequÊncias i.i.d.

Exemplo - Roleta

$$P\left(S_n \geq 0\right) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Vamos considerar $n = 361$ e $\sigma^2 = 0.9972 \approx 1$. Então:

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{-361\,\frac{-1}{19}}{1 * \sqrt{361}}\right) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq 1\right)$$

Pelo Teorema do Limite Central, tem-se que:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Logo:

$$P(S_n \geq 0) \approx 1 - \Phi(1) \approx 0.1587$$

Teorema do Limite Central para sequências i.i.d.

Exemplo - Aproximação da Poisson à Normal

Sejam:

- $Z_\lambda \sim Poisson(\lambda)$;
- $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tal que: $X_i \sim Poisson(1)$;

Consideremos ainda $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, que sabemos seguir uma distribução Poisson de parâmentro n.
Como $Var(X_i) = 1$, segue então do Teorema do Limite Central que:

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \approx N(0, 1)$$

Teorema do Limite Central para sequências i.i.d.

Exemplo - Aproximação da Poisson à Normal

No exemplo anterior lidou-se com um valor de λ inteiro. Considere-se agora um valor não inteiro para λ. Sejam:

- N_1, N_2, N_3 variáveis aleatórias com distribuição Poisson de parâmetros: $[\lambda]$, $\lambda - [\lambda]$ e $[\lambda] + 1 - \lambda$, respetivamente;
- $S_{[\lambda]} = N_1$, $Z_\lambda = N_1 + N_2$ e $S_{[\lambda]+1} = N_1 + N_2 + N_3$.

Então, segue que:

$$S_{[\lambda]} \leq Z_\lambda \leq S_{[\lambda]+1}$$

Aplicando o Teorema do Limite Central a S_n, tem-se:

$$\frac{Z_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0, 1)$$

Teorema de Lindeberg - Feller

Teorema 6

Para cada n, sejam $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, variáveis aleatórias independentes de tal forma que: $E[X_{n,m}] = 0$. Suponhamos que:

1. $\sum_{m=1}^{n} E\left[X_{n,m}^2\right] \to \sigma^2 > 0$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} E\left[|X_{n,m}|^2 \, 1_{|X_{n,m} > \varepsilon|}\right] = 0$.

Então:

$$S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} \approx N(0, \sigma^2)$$

Teorema de Lindeberg-Feller

Observação: O Teorema anterior diz-nos que a soma de um grande número de pequenos eventos independentes segue, aproximadamente, uma distribuição Normal. Para verificarmos que o Teorema contém o primeiro Teorema do Limite Central enunciado, consideremos:

- $Y_1, Y2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $E[Y_i] = 0$ e $E[Y_i^2] = \sigma^2 \in]0, \infty[$;
- $X_{n,m} = \frac{Y_m}{\sqrt{n}}$.

Então:

$$\sum_{m=1}^{n} E[X_{n,m}^2] = \sigma^2$$

e se $\varepsilon > 0$, então:

$$\sum_{m=1}^{n} E\left[|X_{n,m}|^2 \, 1_{|X_{n,m}|>\varepsilon}\right] = nE\left[\left|\frac{Y_1}{\sqrt{n}}\right|^2 1_{\left|\frac{Y_1}{n}\right|>\varepsilon}\right] = E\left[|Y_1|^2 \, 1_{|Y_1|>\varepsilon\sqrt{n}}\right] \to 0$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, uma vez que $E[Y_1^2] < \infty$

Teorema de Lindeberg - Feller

Teorema 6

Para cada n, sejam $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, variáveis aleatórias independentes de tal forma que: $E[X_{n,m}] = 0$. Suponhamos que:

1. $\sum_{m=1}^{n} E\left[X_{n,m}^2\right] \to \sigma^2 > 0$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} E\left[|X_{n,m}|^2 1_{|X_{n,m}>\varepsilon|}\right] = 0.$

Então:

$$S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} \approx N(0, \sigma^2)$$

Lema 5

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq min\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right)$$

Lema 6

Se: $max_{1\leq m\leq n} |c_{n,m}| \to 0$, $\sum_{m=1}^{n} c_{n,m} \to \lambda$ e $sup_n \sum_{m=1}^{n} |c_{n,m}| < \infty$. Então:

$$\prod_{m=1}^{n} (1 + c_{n,m}) \to e^{\lambda}$$

Teorema de Lindeberg-Feller

Exemplo

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias tal que:

$$P(Y_m = y) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{se } y = 1 \\ 1 - \frac{1}{m} & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Então:

- $E[Y_m] = \frac{1}{m}$;
- $Var(Y_m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}$

Consideremos $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Então:

- $E[S_n] \sim log(n)$;
- $Var(S_n) \sim log(n)$.

Teorema de Lindeberg-Feller

Exemplo

Seja:

$$X_{n,m} = \frac{Y_m - \frac{1}{m}}{\sqrt{log(n)}}$$

Então:

- $E[x_{n,m}] = 0;$
- $\sum_{m=1}^{n} E[X_{n,m}^2] \to 1.$

E para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{n} E\left(|X_{n,m}|^2 1_{|X_{n,m} > \varepsilon|}\right) \to 0$$

Desde que a soma seja zero logo que $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Teorema de Lindeberg-Feller

Exemplo

Aplicando o Teorema de Lindeberg-Feller, tem-se que:

$$\frac{1}{\sqrt{log(n)}}\left(S_n - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right) \sim N(0,1)$$

Teorema de Lindeberg-Feller

Teorema 7

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. e $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Para que existam constantes a_n e $b_n > 0$ de tal forma que:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \sim N(0,1)$$

É necessário e suficiente que:

$$y^2 \frac{P\left(|X_1| > y\right)}{E\left(|X_1|^2 \, 1_{|X_1 \leq y|}\right)} \to 0$$

Lei fraca dos números pequenos

O primeiro resultado que será apresentado é muitas vezes chamado de ”lei fraca dos números pequenos” e ”lei de eventos raros”, uma vez que a Poisson aparece como limite da soma de eventos com probabilidades pequenas.
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli.
Queremos ver que se cada X_i tem probabilidade p_i pequena então:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{a}{\sim} Poisson\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$$

Teorema 8

Para cada n, sejam $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, variáveis aleatórias independentes com $P\left(X_{n,m} = 1\right) = p_{n,m}$, $P\left(X_{n,m} = 0\right) = 1 - p_{n,m}$. Suponhamos:

1. $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \to \lambda \in (0, \infty)$
2. $max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} \to 0$

Se $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ então

$$S_n \xrightarrow{d} Z$$

onde

$$Z \sim Poisson(\lambda)$$

.

1ª Demonstração

Teorema 8

Para cada n, sejam $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, variáveis aleatórias independentes com $P(X_{n,m} = 1) = p_{n,m}$, $P(X_{n,m} = 0) = 1 - p_{n,m}$. Suponhamos:

1. $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \to \lambda \in (0, \infty)$
2. $max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} \to 0$

Se $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ então

$$S_n \xrightarrow{d} Z$$

onde $Z \sim Poisson(\lambda)$.

Lema 7

Sejam $z_1, \ldots z_n$ e $w_1 \ldots w_n$, números complexos de módulo igual ou inferior a θ. Então:

$$\left| \prod_{m=1}^{n} z_m - \prod_{m=1}^{n} w_m \right| \leq \theta^{n-1} \sum_{m=1}^{n} |z_m - w_m|$$

Lema 8

Se b é um número complexo tal que $|b| \leq 1$, então: $\left| e^b - (1 + b) \right| \leq |b|^2$

2ª Demonstração

Teorema 8

Para cada n, sejam $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, variáveis aleatórias independentes com $P(X_{n,m} = 1) = p_{n,m}$, $P(X_{n,m} = 0) = 1 - p_{n,m}$. Suponhamos:

1. $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \to \lambda \in (0, \infty)$
2. $max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} \to 0$

Se $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ então $S_n \xrightarrow{d} Z$ onde $Z \sim Poisson(\lambda)$.

Distância de Variação Total entre duas medidas de um conjunto contável S:

$$||\mu - \upsilon|| \equiv \frac{1}{2} \sum_{z} |\mu(z) - \upsilon(z)| = \sup_{A \subset S} |\mu(A) - \upsilon(A)|$$

Lema 9

Se $\mu_1 x \mu_2$ representa a medida produto em $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ em que $(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$ então $||\mu_1 \times \mu_2 - \upsilon_1 \times \upsilon_2|| \leq ||\mu_1 - \upsilon_1|| + ||\mu_2 - \upsilon_2||$.

Lema 10

Se $\mu_1 * \mu_2$ representa a convolução de μ_1 e μ_2, isto é, $\mu_1 * \mu_2(x) = \sum_y \mu_1(x - y)\mu_2(y)$ então $||\mu_1 * \mu_2 - \upsilon_1 * \upsilon_2|| \leq ||\mu_1 \times \mu_2 - \upsilon_1 \times \upsilon_2||$.

Lema 11

Seja μ a medida com $\mu(1) = p$ e $\mu(0) = p$. Seja υ uma distribuição de Poisson com parâmetro p. Então $||\mu - \upsilon|| \leq p^2$.

Convergência para a Poisson

Exemplo - Dados

Suponhamos que lançamos dois dados 36 vezes. A probabilidade de sair número 1 nos 2 dados simultaneamente é $1/36$, logo o número de vezes que isto ocorre deve ter, aproximadamente, distribuição Poisson com média 1. Comparando a aproximação da Poisson com o valor exacto das probabilidades demonstra que a aproximação é boa, mesmo que o número de lançamentos seja pequeno.

k	0	1	2	3
Poisson	0.3678	0.3678	0.1839	0.0613
exact	0.3627	0.3730	0.1865	0.0604

Convergência para a Poisson

Exemplo - 2ª Guerra Mundial

Sejam $U_{n,m} \sim U[-n,n]$, variáveis aleatórias independentes,

$$X_{n,m} = \begin{cases} 1 & U_{n,m} \in (a,b) \\ 0 & c.c. \end{cases} \tag{1}$$

e $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_{n,m}$ (número de pontos dentro do conjunto (a,b)).
Sabe-se que $p_{n,m} = (b-a)/2n$, logo $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} = (b-a)/2$. Assim, as condições do teorema são verificadas:

1. $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \to (b-a)/2 \in (0,\infty)$
2. $max_{1\leq m \leq n} p_{n,m} = (b-a)/2n \to 0$

Assim, concluímos que $S_n \to Z$ em distribuição, onde $Z \sim Poisson(\frac{b-a}{2})$. Uma bomba lançada para o Sul de Londres, durante a 2ª Guerra Mundial, segue uma distribuição de Poisson. A área foi dividida em 576 regiões e o número total de bombas que atingiram esta zona foram 537. Assim, adaptando o último teorema para $\mathbb{R}^2$, seja S o número de regiões que as bombas atingem k vezes, obtemos: $S \overset{a}{\sim} Poisson\left(\frac{537}{576}\right)$

k	0	1	2	3	4	≥ 5
N_k	229	211	93	35	7	1
Poisson	226.74	211.39	98.54	30.62	7.14	1.57

References

- Durret, R (2013) Probability: Theory and Examples.