# Processos Pontuais de Poisson

Inês Oliveira, 80973
Manuel Portela, 81027

**Instituto Superior Técnico**

*Teoria da Probabilidade*

20 Dezembro 2017

# Overview

## Definição (Processo Estocástico)

*Dado um conjunto índice $T$ qualquer, um processo estocástico é uma colecção de $\{X(t) : t \in T\}$ de v.a. definidas num espaço de probabilidade comum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Para um processo pontual N e conjunto limitado A tem-se:

- $\mathbb{P}[N(A) < \infty] = 1$
- $\mu(A) = \mathbb{E}[N(A)]$

## Definição (Processo de Poisson I)

*Seja $N$ um processo pontual no espaço de estados $E$ e seja $\mathcal{E}$ a $\sigma-$álgebra de Borel gerada por $E$. Então $N$ é um Processo de Poisson com medida média $\mu$ (PRM($\mu$)) se*

1. *Para $A \in \mathcal{E}$*

$$\mathbb{P}[N(A) = k] = \begin{cases} \frac{e^{-\mu(A)}(\mu(A))^k}{k!}, & \mu(A) < \infty \\ 0, & \mu(A) = \infty \end{cases}$$

2. *Se $A_1, \ldots, A_k$ são subconjuntos disjuntos de $E$ em $\mathcal{E}$, então $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ são variáveis aleatórias independentes.*

## Definição (Processo de Poisson II)

*N é um processo de Poisson com taxa* $\lambda > 0$ *se*

a) $N(0) = 0$

b) *N tem incrementos independentes*

c) *O número de eventos em qualquer intervalo de comprimento t tem distribuição Poisson com esperança* $\lambda t$*, isto é,*

$$\forall s, t \geq 0 \quad \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1,$$

### Proposição (1)

*Um processo de Poisson homogéneo $N$ em $[0, \infty[$ com taxa $\lambda$ distribui os pontos de forma a que os tempos, $\{X_n : n \geq 1\}$, entre eles formem uma exponencial de parâmetro $\lambda$, independentes entre si.*

### Proposição (2)

*Seja $\{X_n : n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda$ e defina-se $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $N = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{S_n}$. Então $N$ é um processo de Poisson homogéneo em $[0, \infty[$ com taxa $\lambda$.*

# Processo de Marcação

## Proposição (3)

*Suponha que*

a) $\{X_n\}$ *são elementos aleatórios de um espaço Euclideano* $E_1$ *tal que* $\sum_n \delta_{X_n}$ *é PRM*$(\mu)$*;*

b) $\{J_n\}$ *são elementos aleatórios i.i.d. de um segundo espaço Euclideano* $E_2$ *que seguem a mesma distribuição* $F$*;*

c) *O processo de Poisson e a sequência* $\{J_n\}$ *estão definidas no mesmo espaço de probabilidade e são independentes.*

*Então o processo pontual* $\sum_n \delta_{(X_n, J_n)}$ *em* $E_1 \times E_2$ *é PRM com medida média* $\mu \times F$.

# Processo de Marcação

## Proposição (4)

*Suponha que $T : E \mapsto E'$ é uma aplicação de um espaço Euclideano, E, para outro, E', com a seguinte propriedade: se $B' \subset E'$ é limitado em E', então $T^{-1}B' := \{e \in E : Te \in B'\}$ é limitado em E. Se N é PRM($\mu$) em E com pontos $X_n$, então $N' := N \circ T^{-1}$ é PRM($\mu'$) em E' com pontos $\{T(X_n)\}$ e onde $\mu' := \mu \circ T^{-1}$.*

# Processo de Marcação

**Exemplo (Chegada de Chamadas a Central Telefónica)**

*Suponha-se que as chamadas que chegam a uma central telefónica constituem um processo de Poisson em* $\mathbb{R}$ *com medida média* $\mu$. *A duração das chamadas não depende do tempo em que foram iniciadas e são variáveis aleatórias* $\{J_n\}$ *i.i.d. com uma distribuição comum F. O objetivo é verificar que o tempo em que as chamadas terminam e libertam as linhas também constitui um processo de Poisson.*

# Processo de "Desbaste"

**Exemplo (Hora de Ponta num Restaurante)**

*Considere-se um restaurante em hora de ponta cujos clientes chegam de acordo com um Processo de Poisson com taxa* $\alpha$*. Os clientes podem decidir entrar e ficar para comer (com probabilidade p), ou então podem não esperar e sair (com probabilidade q). Qual é a distribuição dos tempos de espera entre entradas de clientes no restaurante?*

# Referências


- Resnick, S.; *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser, 1992.
- Durrett, R.; *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 2013.
- Ross, S.M.; *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 2010
- Morais, M.C.; *Lecture Notes - Stochastic Processes*, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, 2014
- Billingsley, P.; *Probability Measure*, Wiley, 1990

# The End