Introdução à Teoria do Risco

Irene Brito e Patrícia Gonçalves

Departamento de Matemática e Aplicações

Centro de Matemática

Escola de Ciências

Universidade do Minho

junho de 2015

Índice

Capítulo 1

Teoria de utilidade

Neste capítulo é apresentada uma introdução à Teoria de utilidade, que tem aplicações na tomada de decisão no contexto do cálculo atuarial.

1.1 Modelo de utilidade esperada

Num sistema de seguro, o segurado paga à seguradora um prémio para garantir a cobertura de um seguro em caso de ocorrência de um sinistro. Em geral, o segurado está disposto a pagar mais do que o valor esperado do prejuízo. Assim, a seguradora recebe um prémio que é mais elevado do que o valor esperado da indemnização. Se X representa o montante do prejuízo, então o prejuízo esperado, que se denota por $\mathbb{E}[X]$, representa o chamado prémio líquido (ou prémio puro). Como pode ser visto no seguinte exemplo, o prémio para um risco não é homogéneo, ou seja, não é proporcional ao risco.

Exemplo 1.1.1. *Suponha que um indivíduo (ou segurado) tem o risco de perder a quantidade B com probabilidade 0.01. Se X representa o montante do prejuízo então $X = B$ com probabilidade 0.01 e $X = 0$ com probabilidade 0.99:*

$$X = \begin{cases} B, & 0.01 \\ 0, & 0.99. \end{cases}$$

Logo $\mathbb{E}[X] = B \times 0.01$. *Fazendo um seguro contra esta perda, ele está disposto a pagar um prémio, que se denota por* P, *para este contrato de seguro.*

1. *Se* B *for pequeno, então* P *não vai ser muito maior do que* $0.01B$, *logo* $P \sim 0.01B$.

2. *Se* B *for mais elevado, por exemplo 500 unidades monetárias (u.m.), então* P *poderá ser um pouco mais elevado do que* $5 = 0.01 \times 500$, *ou seja,* $P > 0.01B = 5$.

3. *Se* B *for muito elevado, então* P *é muito maior do que* $0.01B$, *porque esta perda pode levar a uma situação de ruína por parte do segurado.*

No último caso, o indivíduo está disposto a pagar muito mais do que o valor esperado do prejuízo.

Exemplo 1.1.2. *(Paradoxo de St. Petersburg)*

Suponha que pagando uma quantidade P *é possível entrar no seguinte jogo. É lançada uma moeda ao ar até que apareça o lado "cara". Se forem precisos n lançamentos até que ocorra "cara", o ganho* X *é* 2^n. *Sendo assim,* X *é uma variável aleatória que toma o valor* 2^n *quando são precisos n lançamentos de uma moeda em que a primeira vez que saia cara seja no n-ésimo lançamento. A probabilidade de tal evento é, assumindo que os lançamentos são independentes, igual a* $q^{n-1}(1-q)$, *onde* q *representa a probabilidade de sair coroa. Assumindo que a moeda é regular, tem-se que* $q = 1/2$, *donde resulta que a probabilidade acima é igual a* $(1/2)^n$. *Logo* X *é uma variável aleatória dada por*

$$X = \begin{cases} 2^n, & p = \frac{1}{2^n} \\ 0, & 1-p. \end{cases}$$

Então, o ganho esperado é

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty.$$

Excetuando o caso em que o prémio P é muito pequeno, poucas pessoas estão dispostas a entrar neste jogo, o que significa que poucos se preocupam somente com o ganho esperado, que neste caso seria infinito.

A teoria da utilidade foi desenvolvida com o objetivo de dar apoio à tomada de decisões em situações de incerteza e tem aplicações no contexto de sistemas de seguro.

Um decisor atribui um valor $u(w)$ ao seu capital w, em que $u(\cdot)$ é a sua função utilidade. Se ele tiver que optar entre duas perdas (ou riscos) aleatórios X e Y, ele compara $\mathbb{E}[u(w-X)]$ com $\mathbb{E}[u(w-Y)]$ e escolhe a perda com utilidade esperada mais elevada.

O prémio máximo, que se denota por P^+, que um segurado com função de utilidade $u(\cdot)$ está disposto a pagar para uma perda aleatória X, pode ser determinado resolvendo , em ordem a P a seguinte equação de equilíbrio

$$\mathbb{E}[u(w-X)] = u(w-P).$$

Analogamente, a seguradora, com a sua função de utilidade, determina um prémio mínimo, que se denota por P^-, que está disposta a receber pelo contrato de seguro.

Se $P^+ \geq P^-$, então a utilidade aumenta para a seguradora e para o segurado se o prémio P estiver entre P^- e P^+, ou seja, se $P^- \leq P \leq P^+$.

Modelo de Von Neumann e Morgenstern

O modelo desenvolvido por Von Neumann e Morgenstern (1947) descreve como decisores optam entre alternativas inseguras. Se um decisor pode escolher entre perdas aleatórias X, então existe uma função de utilidade $u(\cdot)$ que avalia o capital w, tal que as decisões que toma são exatamente as mesmas que resultam de comparar as perdas X baseadas na esperança $\mathbb{E}[u(w-X)]$. Assim, uma decisão complexa reduz-se a uma comparação de números reais.

Mais precisamente, sejam X e Y perdas aleatórias. Então, se

$$\mathbb{E}[u(w-X)] \leq \mathbb{E}[u(w-Y)]$$

o decisor, com capital w, opta por Y, pois Y é a perda que dá maior valor de utilidade esperada.

Se $\mathbb{E}[u(w-X)] = \mathbb{E}[u(w-Y)]$, então o decisor é indiferente a X ou Y.

Se X e Y representam ganhos aleatórios, então, o decisor compara $\mathbb{E}[u(w+X)]$ com $\mathbb{E}[u(w+Y)]$ e opta pelo ganho que tem maior valor de utilidade esperada.

Lema 1.1.3. *Para comparar duas perdas aleatórias X e Y, a função de utilidade $u(\cdot)$ e a sua transformação linear $a\,u(\cdot)+b$, onde $a>0, b\in\mathbb{R}$ são equivalentes, pois resultam na mesma tomada de decisão. Formalmente:*

$$\mathbb{E}[u(w-X)] \leq \mathbb{E}[u(w-Y)] \Leftrightarrow \mathbb{E}[a\,u(w-X)+b] \leq \mathbb{E}[a\,u(w-Y)+b].$$

Demonstração

A prova resulta da linearidade da esperança e do facto de $a>0$. Deixa-se a cargo do leitor esta demonstração. $\square$

Uma vez que uma função de utilidade $u(\cdot)$ e a sua transformação linear levam à mesma tomada de decisão, para cada classe de funções de utilidade, pode-se selecionar uma função, pedindo, por exemplo, que verifique $u(0)=0$ e $u(1)=1$.

O seguinte resultado diz que para funções de utilidade crescentes e lineares as preferências entre dois riscos ou perdas, estão de acordo com as preferências baseadas no princípio do valor esperado. Segundo este princípio, para decidir entre X e Y compara-se $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$.

Corolário 1.1.4. *Seja $\tilde{u}(\cdot)$ uma função de utilidade linear, $\tilde{u}(w) = aw + b$, com $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Então, se $\mathbb{E}[X] = \mu_X$ e $\mathbb{E}[Y] = \mu_Y$, tem-se que*

$$\mathbb{E}[\tilde{u}(X)] = a\mu_X + b > \mathbb{E}[\tilde{u}(Y)] = a\mu_Y + b \Leftrightarrow \mu_X > \mu_Y.$$

O que este corolário diz é que quando se usa uma função de utilidade linear, a decisão com base no valor esperado de utilidade é a mesma que analisando o valor esperado dos riscos.

Note-se que o resultado anterior é um corolário do Lema 1.1.3 considerando $u(w) = w$ e notando que a sua transformação linear é, precisamente, $\tilde{u}(\cdot)$.

Exemplo 1.1.5. *(Aversão e não-aversão ao risco)*

Suponha que um indivíduo possui o capital w e que avalia o seu capital usando a função de utilidade $u(\cdot)$. Sabe-se que, dadas as opções:

(a) perder a quantidade b com probabilidade $\frac{1}{2}$,

(b) pagar um montante fixo $\frac{1}{2}b$,

o indivíduo escolhe:

- *(a) se $b = 1$,*
- *(b) se $b = 4$,*
- *é indiferente a (a) ou (b) se $b = 2$.*

O que se pode dizer sobre a sua função utilidade $u(\cdot)$?

Neste caso, o valor de w é irrelevante, pode-se escolher $w = 0$. Pelo Lema 1.1.3, pode-se ainda supor que $u(0) = 0$ e $u(-1) = -1$. Agora vai-se analisar as opções do decisor e verificar que informação se pode obter sobre a função de utilidade $u(\cdot)$. A primeira dificuldade consiste em identificar os riscos (ou perdas) que estão em causa. Neste caso tem-se a perda dada por:

$$X = \begin{cases} b, & p = \frac{1}{2} \\ 0, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e o ganho dado por $Y = b/2$.

Como para $b = 2$ é indiferente optar por X ou Y, então, neste caso, tem-se que

$$\mathbb{E}[u(w - X)] = \mathbb{E}[u(w - Y)].$$

Lembre que se fixou $w = 0$ e $b = 2$. Agora note que $\mathbb{E}[u(-Y)] = u(-1)$. Por outro lado, tem-se que $\mathbb{E}[u(-X)] = u(0)\frac{1}{2} + u(-2)\frac{1}{2}$. Igualando as esperanças acima, obtém-se:

$$\frac{1}{2}[u(0) + u(-2)] = u(-1). \tag{1.1.1}$$

Para $b = 1$ a preferência do indivíduo corresponde à seguinte desigualdade $\mathbb{E}[u(w - X)] > \mathbb{E}[u(w - Y)]$, ou seja:

$$\frac{1}{2}[u(0) + u(-1)] > u\left(-\frac{1}{2}\right) \tag{1.1.2}$$

e para $b = 4$ a preferência do indivíduo corresponde à seguinte desigualdade $\mathbb{E}[u(w - X)] < \mathbb{E}[u(w - Y)]$, ou seja:

$$\frac{1}{2}[u(0) + u(-4)] < u(-2). \tag{1.1.3}$$

Como $u(0) = 0$ e $u(-1) = -1$, então a partir de (1.1.1), (1.1.2) e (1.1.3) obtém-se

$$u(-2) = -2, \;\; u\left(-\frac{1}{2}\right) < -\frac{1}{2}, \;\; u(-4) < -4. \tag{1.1.4}$$

Daqui conclui-se que a função de utilidade $u(x)$, da qual tem-se informação sobre o seu valor nos pontos $x = -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0$, deve passar por baixo da diagonal $v(x) = x$ para $-1 < x < 0$ e $x < -2$ e por cima da diagonal para $x \in (-2, -1)$.

Assume-se que as funções utilidade são não-decrescentes, isto é, $u'(x) \geq 0$, onde $u'(x)$ designa-se por *utilidade marginal*. Nestes casos, a utilidade marginal é não-negativa.

Uma classe importante de decisores são os que têm aversão ao risco. Estes têm utilidade marginal decrescente, ou seja, $u''(x) \leq 0$. Para explicar porque é que estes decisores têm aversão ao risco introduz-se o seguinte teorema.

Teorema 1.1.6 (Desigualdade de Jensen)**.**

Se $u(\cdot)$ é uma função convexa e Y é uma variável aleatória, então

$$\mathbb{E}[u(Y)] \geq u(\mathbb{E}[Y]),$$

e a igualdade é válida se, e só se, $u(\cdot)$ é linear no suporte de Y ou no caso em que $Var[Y] = 0$.

Se $u(\cdot)$ é uma função côncava e Y é uma variável aleatória, então

$$\mathbb{E}[u(Y)] \leq u(\mathbb{E}[Y]).$$

Nota 1.1.7. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ é convexa se, e só se, $f''(x) \geq 0$.*

Demonstração

Seja $u(\cdot)$ uma função convexa, ou seja, tal que $u''(w) \geq 0$. Se $\mathbb{E}[Y] = \mu$ existe, considere a reta tangente à função $u(\cdot)$ no ponto $(\mu, u(\mu))$, que se denota por ℓ e cuja equação é dada por:

$$\ell(w) = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu).$$

Como $u(\cdot)$ é convexa, sabe-se que

$$u(w) \geq \ell(w) = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu), \ \forall w.$$

Substituindo w pela variável aleatória Y e calculando os respetivos valores esperados, obtém-se

$$\mathbb{E}[u(Y)] \geq u(\mu) = u(\mathbb{E}[Y]).$$

□

Nota 1.1.8. *No caso de $u(\cdot)$ ser côncava, basta repetir a demonstração anterior trocando $u(\cdot)$ por $-u(\cdot)$.*

Corolário 1.1.9. *Sejam $u(\cdot)$ uma função de utilidade côncava, w o capital, P o prémio num contrato de seguro e X uma variável aleatória que representa um prejuízo, então:*

$$u(w-P) = \mathbb{E}[u(w-X)] \leq u(\mathbb{E}[w-X]) = u(w-\mathbb{E}[X]).$$

Como $u(\cdot)$ é crescente, conclui-se que $w-P \leq w-\mathbb{E}[X]$ e, assim, $P \geq \mathbb{E}[X]$. Logo, de acordo com este resultado, conclui-se que um decisor com função de utilidade côncava prefere pagar mais do que o valor esperado do prejuízo. Este decisor é, portanto, adverso ao risco.

Suponha que um segurado com aversão ao risco possui capital w e função de utilidade $u(\cdot)$. Assumindo que ele tem um seguro contra a perda X com prémio P, a sua utilidade esperada vai aumentar se $\mathbb{E}[u(w-X)] \leq u(w-P)$. Como $u(\cdot)$ é uma função contínua não-decrescente, a desigualdade anterior é equivalente a $P \leq P^+$, onde P^+ representa o prémio máximo a ser pago.

Definição 1.1.10 (Prémio máximo)**.**

O prémio máximo P^+ que um segurado com função de utilidade $u(\cdot)$ e com capital w está disposto a pagar num contrato de seguro contra um risco X é solução da seguinte equação de equilíbrio de utilidade:

$$\mathbb{E}[u(w-X)] = u(w-P^+). \tag{1.1.5}$$

A interpretação da igualdade anterior é simples e resulta do seguinte facto. O segurado pretende pagar um valor máximo P^+ de tal modo que, o valor do seu capital após o pagamento do prémio máximo P^+, nomeadamente $w-P^+$ tenha utilidade igual à utilidade esperada do seu capital menos o valor da perda X.

Por outro lado, a seguradora com função utilidade $U(\cdot)$ e capital W aceita um contrato de seguro contra o risco X por um prémio P se

$$E[U(W+P-X)] \geq U(W). \tag{1.1.6}$$

Assim, $P \geq P^-$, em que P^- representa o prémio mínimo que a seguradora pretende cobrar pelo contrato de seguro.

Definição 1.1.11 (Prémio mínimo)**.**

O prémio mínimo P^- que uma seguradora com função de utilidade $U(\cdot)$ e com capital W pretende cobrar num contrato de seguro para cobrir um risco X é solução da seguinte equação de equilíbrio de utilidade:

$$U(W) = \mathbb{E}[U(W + P^- - X)]. \tag{1.1.7}$$

A interpretação da igualdade anterior também é simples e resulta do seguinte facto. A seguradora ao aceitar o contrato, pretende que a utilidade do seu capital W antes de fazer o contrato, no mínimo, coincida com a utilidade esperada do seu capital mais o valor do prémio P^- menos o valor da perda X.

É possível chegar a um acordo que melhora a utilidade esperada para o segurado e para a seguradora se $P^+ \geq P^-$.

Do ponto de vista teórico, as seguradoras são muitas vezes consideradas neutras ao risco. Assim, para qualquer risco X, se não forem considerados custos adicionais, um prémio $\mathbb{E}[X]$ é suficiente. Assim, teria-se

$$\mathbb{E}[U(W + \mathbb{E}[X] - X)] = U(W), \tag{1.1.8}$$

para qualquer risco X.

Exemplo 1.1.12. *(Aproximação para P^+)*

Dada a função de utilidade $u(\cdot)$, podemos aproximar o prémio máximo P^+ para um risco X da seguinte forma.

Sejam $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$. Usando os primeiros termos da expansão em série de Taylor de $u(\cdot)$ em torno de $w - \mu$, obtém-se

$$u(w - P^+) \approx u(w-\mu) + (\mu - P^+)u'(w-\mu), \tag{1.1.9}$$

$$u(w - X) \approx u(w-\mu) + (\mu - X)u'(w-\mu) + \frac{1}{2}(\mu - X)^2 u''(w-\mu). \tag{1.1.10}$$

Nota que, como apenas se sabe que a variância de X é finita, não tendo qualquer outra informação acerca dos momentos de ordem superior de X, a segunda expansão em série de Taylor é feita até ao segundo termo. Caso tivessemos mais informação sobre os momentos de ordem maior de X, poderíamos obter outra aproximação para P^+ mais precisa do que esta.

Calculando o valor esperado em ambos os membros da última expressão e lembrando que $\mu = \mathbb{E}[X]$, obtém-se

$$\mathbb{E}[u(w-X)] \approx u(w-\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(w-\mu). \tag{1.1.11}$$

Substituindo (1.1.5) *em* (1.1.11) *e usando* (1.1.9) *resulta que*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 u''(w-\mu) \approx (\mu - P^+)u'(w-\mu). \tag{1.1.12}$$

Então, o prémio máximo P^+ para um risco X é, aproximadamente, dado por

$$P^+ \approx \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)}. \tag{1.1.13}$$

Definição 1.1.13 (Coeficiente de aversão ao risco)**.**

O coeficiente de aversão ao risco da função utilidade $u(\cdot)$ é definido por

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}. \tag{1.1.14}$$

Nota 1.1.14. *Nota que como $u(\cdot)$ é uma função crescente então $u'(\cdot) > 0$ e para além disso, como para decisores com aversão ao risco, $u(\cdot)$ é côncava, ou seja, $u''(\cdot) \leq 0$, então $r(\cdot)$ é uma função não negativa, ou seja, $r(\cdot) \geq 0$.*

Nota 1.1.15. *Sendo assim, a aproximação para o prémio P^+ para um risco X pode ser escrita na forma*

$$P^+ \approx \mu + \frac{1}{2} r(w-\mu)\sigma^2. \tag{1.1.15}$$

O coeficiente de aversão ao risco reflete o grau de aversão ao risco: quanto maior é o coeficiente de aversão ao risco, maior é o prémio que um indivíuo está disposto a pagar.

1.2 Classes de funções de utilidade

Existem as seguintes classes de funções de utilidade:

1. Utilidade linear: $u(w) = w$,
2. Utilidade quadrática: $u(w) = -(\alpha - w)^2$, $w \leq \alpha$,
3. Utilidade logarítmica: $u(w) = \log(\alpha + w)$, $w > -\alpha$,
4. Utilidade exponencial: $u(w) = -\alpha e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$,
5. Utilidade de potência: $u(w) = w^c$, $w > 0$, $0 < c \leq 1$.

Para a função de utilidade quadrática estabelece-se que $u(w) = 0$ se $w > \alpha$.

Estas funções de utilidade e as suas transformações lineares têm utilidade marginal não-negativa e não-crescente. Antes de prosseguir vamos calcular a utilidade marginal e o coeficiente de aversão ao risco para cada uma dessas classes de funções. A utilidade marginal é dada por:

1. Utilidade linear: $u'(w) = 1$,
2. Utilidade quadrática: $u'(w) = 2(\alpha - w)$, $w < \alpha$,
3. Utilidade logarítmica: $u'(w) = \frac{1}{\alpha + w}$, $w > -\alpha$,
4. Utilidade exponencial: $u'(w) = \alpha^2 e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$,
5. Utilidade de potência: $u'(w) = c w^{c-1}$, $w > 0$, $0 < c \leq 1$.

O coeficiente de aversão ao risco é dado por:

1. Utilidade linear: $r(w) = 0$,
2. Utilidade quadrática: $r(w) = \frac{1}{\alpha - w}$, $w < \alpha$,
3. Utilidade logarítmica: $r(w) = \frac{1}{\alpha + w}$, $w > -\alpha$,

4. Utilidade exponencial: $r(w) = \alpha,\ \ \alpha > 0$,

5. Utilidade de potência: $r(w) = \frac{1-c}{w},\ \ w > 0,\ 0 < c \leq 1$.

Note que o coeficiente de aversão ao risco para a utilidade linear é 0 e para a utilidade exponencial é α. Para as outras funções de utilidade, o coeficiente de aversão ao risco pode ser escrito da forma $(\gamma + \beta w)^{-1}$ para um dado β e γ. Para tal, note que no caso 2. basta tomar $\gamma = \alpha$ e $\beta = -1$, no caso 3. basta tomar $\gamma = \alpha$ e $\beta = 1$ e no caso 5. basta tomar $\gamma = 0$ e $\beta = \frac{1}{1-c}$.

Exemplo 1.2.1.

Suponha que um decisor com função de utilidade quadrática pode escolher entre dois montantes aleatórios X e Y em troca do seu capital w. Sabendo que os riscos têm a mesma média, mostre que o decisor prefere X a Y se $Var[X] < Var[Y]$.

Como o decisor prefere X a Y, então $\mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)]$, que para a função de utilidade quadrática é equivalente a

$$\mathbb{E}[-(\alpha - X)^2] > \mathbb{E}[-(\alpha - Y)^2].$$

Simplificando a desigualdade anterior tendo em conta que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mu$, obtém-se

$$\mathbb{E}[X^2] < \mathbb{E}[Y^2],$$

que pode ser escrito em função das variâncias:

$$Var[X] + \mu^2 < Var[Y] + \mu^2.$$

Daqui resulta que $Var[X] < Var[Y]$.

Exemplo 1.2.2. *(Prémio exponencial)*

Suponha que uma seguradora tem função de utilidade exponencial de parâmetro α. Qual é o prémio mínimo P^- que é pedido para um risco X?

Resolvendo a equação de equilíbrio (1.1.7) *com a função de utilidade* $U(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, *obtém-se*

$$P^- = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)), \tag{1.2.1}$$

onde $m_X(\alpha) = \mathbb{E}[e^{\alpha X}]$ *é a função geradora de momentos de* X.

Observa-se que o prémio exponencial é independente do capital W *da seguradora, o que está de acordo com o facto do coeficiente de aversão ao risco ser constante igual a* α.

E qual é o prémio máximo P^+ *que um segurado está disposto a pagar se também tem função de utilidade exponencial de parâmetro* α*?*

Resolvendo a equação de equilíbrio (1.1.5) *com função de utilidade* $u(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, *obtém-se*

$$P^+ = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)). \tag{1.2.2}$$

Logo, a expressão para o prémio máximo P^+ *é igual à expressão para o prémio mínimo* P^-, *mas, neste último caso,* α *representa o coeficiente de aversão ao risco do segurado.*

Vai-se concretizar um pouco mais este exemplo. Suponha além disso, que a perda X *tem distribuição exponencial de parâmetro* β. *Lembre que, neste caso,* $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\beta}$ *e* $m_X(\alpha) = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$ *se* $\alpha < \beta$. *Então, para* $\beta = 0.01$ *tem-se* $\mathbb{E}[X] = 100$. *Se a função de utilidade do segurado é exponencial de parâmetro* $\alpha = 0.005$, *então*

$$P^+ = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)) = 200\log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right) = 200\log(2) \approx 138.6. \tag{1.2.3}$$

Isto significa que o segurado está disposto a pagar um valor mais elevado do que o prémio líquido $\mathbb{E}[X]$*=100.*

Da aproximação para o prémio máximo (1.1.15) *resulta que*

$$P^+ \approx \mathbb{E}[X] + \frac{1}{2}\alpha Var[X] = 125. \tag{1.2.4}$$

Note-se que esta aproximação é crescente com α, *uma vez que a variância é sempre um número não negativo. Se* $Var[X] = 0$, *então* X *é constante e igual a* $\mathbb{E}[X]$, *donde resulta que* $P^+ \approx \mathbb{E}[X]$.

Teorema 1.2.3. *O prémio exponencial $P^- = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha))$ para um risco X cresce com o coeficiente de aversão ao risco α.*

Demonstração

Para $0 < \alpha < \gamma$ seja $v(x) = x^{\alpha/\gamma}$. Note que $v(\cdot)$ é uma função estritamente côncava. Pela desigualdade de Jensen, tem-se que

$$v(\mathbb{E}[Y]) > \mathbb{E}[v(Y)],$$

para Y variável aleatória. Seja $Y = e^{\gamma X}$. Ora,

$$m_X(\gamma)^{\alpha/\gamma} = v(\mathbb{E}[Y]) > \mathbb{E}[v(Y)] = m_X(\alpha),$$

donde resulta que

$$m_X(\alpha)^{\gamma} < m_X(\gamma)^{\alpha}.$$

Logo, para $\gamma > \alpha$, como $\log(\cdot)$ é uma função crescente, tem-se que

$$\gamma\log(m_X(\alpha)) < \alpha\log(m_X(\gamma)).$$

Daqui resulta que $P^-(\alpha) < P^-(\gamma)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 1.2.4. *(Utilidade quadrática)*

Suponha que para $w < 5$ a função utilidade do segurado é $u(w) = 10w - w^2$. Qual é o prémio P^+ como função de w, $w \in [0,5]$, para um contrato de seguro contra uma perda de 1 u.m. com probabilidade $\frac{1}{2}$?

Começamos por identificar o risco aleatório que é dado por

$$X = \begin{cases} 1, & p = \frac{1}{2} \\ 0, & p = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

A utilidade esperada após a perda X é dada por

$$\mathbb{E}[u(w-X)] = u(w-1)\frac{1}{2} + u(w)\frac{1}{2} = 11w - \frac{11}{2} - w^2. \tag{1.2.5}$$

A utilidade depois de pagar um prémio P é dada por

$$u(w-P)=10(w-P)-(w-P)^2. \tag{1.2.6}$$

Pela equação de equilíbrio (1.1.5)*, igualando as duas últimas expressões, obtém-se que o prémio máximo é solução da equação*

$$P^2+(10-2w)P+w-\frac{11}{2}=0.$$

Como $w\in[0,5]$ *e o prémio tem que ser positivo, obtém-se a solução*

$$P^+=P^+(w)=\sqrt{\left(\frac{11}{2}-w\right)^2+\frac{1}{4}}-(5-w). \tag{1.2.7}$$

Por outro lado, uma conta simples mostra que

$$(P^+)'(w)=1+\frac{(w-\frac{11}{2})}{\sqrt{(w-\frac{11}{2})^2+\frac{1}{4}}}>0.$$

Logo o prémio máximo P^+ *cresce com o capital* w*.*

Exemplo 1.2.5. *(Utilidade logarítmica)*

Considere a função de utilidade $u(x)=\beta\log x$*, onde* $x>0$ *e* $\beta>0$*. Suponha que um indivíduo tem capital* W *e tem a possibilidade de investir em ações de* n *empresas. Depois de investir na empresa* i *o capital resultante será* WX_i*, onde* X_i*,* $i=1,...,n$*, é um montante aleatório. Mostre que a decisão do indivíduo é independente de* W *para a função de utilidade considerada.*

O indivíduo prefere investir em ações da empresa i *do que da empresa* j *se e só se*

$$\mathbb{E}[u(WX_i)]>\mathbb{E}[u(WX_j)].$$

Aplicando as propriedades da função logaritmo, vem que

$$\mathbb{E}[u(WX_i)]=\mathbb{E}[\beta\log(WX_i)]=\beta\mathbb{E}[\log W]+\beta\mathbb{E}[\log X_i],$$

sendo a expressão para $\mathbb{E}[u(WX_j)]$ *análoga a esta. Assim, conclui-se que o indivíduo prefere investir em ações da empresa* i *do que da empresa* j *se e só se*

$$\mathbb{E}[\log X_i] > \mathbb{E}[\log X_j],$$

que é independente de W.

Exemplo 1.2.6. *(Risco não-segurável)*

Um decisor com função de utilidade exponencial com coeficiente de aversão ao risco $\alpha > 0$ *quer fazer um seguro para um risco com distribuição Gama*$(n,1)$. *Determine* P^+ *e prove que* $P^+ > n$.

Como a função de utilidade é exponencial sabe-se que $P^+ = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha))$. *Como* X *tem distribuição Gama*$(n,1)$, *então* $m_X(\alpha) = (1-\alpha)^{-n}$ *se* $0 < \alpha < 1$. *Então, conclui-se que*

$$P^+ = \begin{cases} -\frac{n}{\alpha}\log(1-\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Note que, acima o valor de P^+ *obtido para* $\alpha \geq 1$ *é igual a* ∞, *uma vez que* $\lim_{\alpha \to 1} P^+(\alpha) = \infty$ *e* $P^+(\alpha)$ *é uma função crescente com* α.

Como $\log(1+x) < x$ *para* $x > -1$, $x \neq 0$, *tem-se que* $\log(1-\alpha) < -\alpha$ *e, assim,* $P^+ > n = \mathbb{E}[X]$. *Deste modo, o prémio* P^+ *é maior do que o prémio líquido* $\mathbb{E}[X]$. *Se* $\alpha \geq 1$, *então* $P^+ = \infty$. *Isto significa que o decisor está disposto a pagar um prémio de valor infinito.*

Do ponto de vista da seguradora com função de utilidade exponencial e com risco de aversão $\alpha \geq 1$, *segurando o risco* X *também haverá uma perda em termos de utilidade, para qualquer prémio finito* P, *uma vez que neste caso também se tem que* $P^- = P^+ = \infty$. *Logo, para a seguradora, este risco não é segurável.*

Nota 1.2.7 (Paradoxo de Allais (1953))**.**

Considere os seguintes ganhos:

$$
\begin{aligned}
X &= \quad 1000000, \quad p = 1. \\
Y &= \begin{cases} 5000000, & p = 0.10 \\ 1000000, & p = 0.89 \\ 0 & p = 0.01. \end{cases} \\
V &= \begin{cases} 1000000, & p = 0.11 \\ 0, & p = 0.89. \end{cases} \\
W &= \begin{cases} 5000000, & p = 0.10 \\ 0, & p = 0.90. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dada a possibilidade de escolher entre X e Y, observou-se que muitas pessoas preferem X a Y, mas ao mesmo tempo preferem W a V. Vejamos que este resultado não está de acordo com a hipótese de utilidade esperada.

Assume-se que o capital inicial é 0. Então a última preferência corresponde a $\mathbb{E}[u(W)] > \mathbb{E}[u(V)]$, o que é equivalente a

$$0.1u(5000000) + 0.01u(0) > 0.11u(1000000).$$

A primeira preferência corresponde a $\mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)]$, o que é equivalente a

$$0.11u(1000000) > 0.1u(5000000) + 0.01u(0),$$

obtendo-se uma desigualdade oposta à anterior.

Este exemplo mostra que a utilidade esperada nem sempre descreve, adequadamente, o comportamento dos decisores.

Exemplo 1.2.8.

Seja $\alpha \in (0,1)$. Suponha que uma seguradora aceita um contrato para um risco X e que a sua função de utilidade é dada por $u(w) = w^{\alpha}$. Depois de receber o prémio a seguradora tem capital w.

1. *Calcule o coeficiente de aversão ao risco e verifique que este decresce com α.*

   Conforme foi visto acima, o coeficiente de aversão ao risco é dado por $r(w) = \frac{1-\alpha}{w}$. Logo, considerando o capital w fixo e vendo r como função de α, tem-se que $d_\alpha r(\alpha) = -\frac{1}{w} < 0$, pois o capital é sempre positivo. Daqui conclui-se que a função r é decrescente com α.

2. *Determine o prémio máximo P^+ que a seguradora está disposta a pagar a uma resseguradora para que esta se encarregue do risco completo X, sabendo que $w = 112.5$, $X = b\text{Bernoulli}(p)$ com $\mathbb{E}[X] = 75$ e $Var[X] = 25$.*

   Primeiro identifica-se o risco X como sendo a variável aleatória que satisfaz

$$X = \begin{cases} b, & p \\ 0, & 1-p. \end{cases}$$

   Uma conta simples mostra que $\mathbb{E}[X] = bp$ e $Var[X] = b^2 p(1-p)$. Da informação acima tem-se que $b = 75/p$ e p satisfaz $75^2(1-p) = 25p$, ou seja, $p = \frac{225}{226}$ e $b = \frac{226}{3}$. Sendo assim, o prémio máximo é solução da seguinte equação de utilidade

$$(w-b)^\alpha p + w^\alpha (1-p) = (w - P^+)^\alpha.$$

3. *Nas condições do item anterior, determine uma aproximação para P^+ e verifique que P^+ tende ao prémio líquido, quando $\alpha \to 1$.*

   Pela expressão para a aproximação de P^+ tem-se que

$$P^+ \sim 75 + \frac{1}{2}\frac{(1-\alpha)}{(w-75)}25 = 75 + \frac{1-\alpha}{3}.$$

   Fazendo o limite quando $\alpha \to 1$ obtém-se que $P^+ \to 75 = \mathbb{E}[X]$.

4. *Suponha agora que um decisor com função utilidade $u(w)$, pode escolher entre dois montantes aleatórios X e Y em troca do seu capital w, onde $X = a$Bernoulli(p) e $Y = 2a$Bernoulli($p/2$). Mostre que o decisor prefere sempre X a Y e determine para que valores de w ele deve rejeitar a oferta.*

   Começa-se por identificar os montantes como as variáveis aleatórias

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} a, & p \\ 0, & 1-p, \end{cases} \\ Y &= \begin{cases} 2a, & p/2 \\ 0, & 1-p/2. \end{cases} \end{aligned}$$

O decisor prefere sempre X a Y uma vez que a desigualdade seguinte é sempre válida: $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$, pois $\mathbb{E}[u(X)] = a^{\alpha}p$ e $\mathbb{E}[u(Y)] = (2a)^{\alpha}p/2$ e $a^{\alpha}p \geq (2a)^{\alpha}p/2$ se, e só se, $\alpha \geq 1$ o que é sempre verdade.

Por outro lado, o decisor rejeita a oferta se $\mathbb{E}[u(X)] > u(W)$. Resolvendo essa desigualdade em ordem ao capital w obtém-se $w < ap^{1/\alpha}$.

1.3 Resseguros stop-loss

Os chamados contratos de resseguro não cobrem um risco na sua totalidade, para tal, usam-se os chamados resseguros (ou seguros) stop-loss, que cobrem a parte superior do risco.

Definição 1.3.1 (Resseguro stop-loss ou seguro stop-loss)**.**

Seja $X \geq 0$ o valor associado a uma perda. Num contrato de resseguro stop-loss (ou seguro stop-loss) com retenção $d > 0$, o pagamento da indemnização é dado por

$$(X-d)_+ := max\{X-d, 0\} = \begin{cases} X-d, & se\ X > d \\ 0, & se\ X \leq d. \end{cases}$$

Num contrato de resseguro stop-loss com retenção d, a seguradora paga a retenção d e a resseguradora paga o restante valor $X - d$. Analogamente, num contrato de seguro stop-loss, que é conhecido por contrato com franquia, o segurado paga a franquia d e a seguradora paga o restante valor $X - d$.

Assim, o prejuízo para a seguradora num contrato de resseguro stop-loss, ou para o segurado num contrato de seguro com franquia, é

$$X - (X-d)_+ = \begin{cases} d, & \text{se } X > d \\ X, & \text{se } X \leq d. \end{cases}$$

É simples fazer uma interpretação do prezuízo $X - (X-d)_+$. No caso do contrato com franquia, se o valor da indemnização X é igual ou inferior a d, então o segurado tem que pagar o valor total da indemnização que coincide com X, isto porque o valor da indemnização é inferior ao valor da franquia. Caso o valor da indemnização X seja superior a d, então a seguradora paga o valor $X - d$ e o segurado paga o valor da franquia d.

Definição 1.3.2 (Prémio stop-loss)**.**

Num contrato stop-loss, o prémio stop-loss é o prémio líquido $\mathbb{E}[(X-d)_+]$, *escrevendo-se* $\pi_X(d) := \mathbb{E}[(X-d)_+]$.

Teorema 1.3.3. *Considere o prémio stop-loss* $\pi_X(d)$. *Tanto no caso discreto, em que* X *é uma v.a. discreta, ou seja, em que* $F_X(\cdot)$ *é uma função constante por pedaços com salto igual a* $f_X(x)$ *no ponto* x, *assim como no caso em que* X *é uma v.a. absolutamente contínua, ou seja, em que* $F_X(\cdot)$ *é contínua e tem* $f_X(x) \neq 0$ *como sua derivada, o prémio stop-loss é dado por*

$$\pi_X(d) = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{x>d}(x-d)f_X(x) \\ \\ \int_d^\infty (x-d)f_X(x)\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int_d^\infty [1 - F_X(x)]\mathrm{d}x. \tag{1.3.1}$$

Demonstração

A seguinte figura ilustra a igualdade $\displaystyle\sum_{x>d}(x-d)f_X(x) = \int_d^\infty [1 - F_X(x)]\mathrm{d}x$ para o caso discreto.

A área da região cinzenta, limitada inferiormente pelo gráfico de $F_X(x)$, superiormente pela linha horizontal que passa em 1 e pela linha vertical que passa

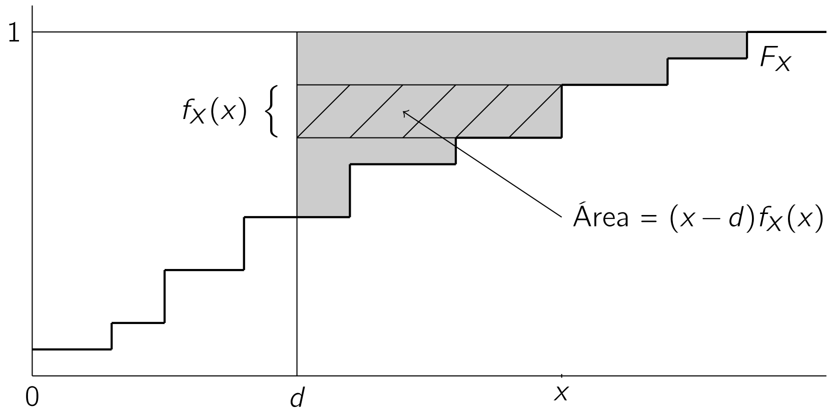


Figura 1.1: Dedução gráfica de (1.3.1) para uma função de distribuição discreta.

em d, pode ser dividida em retângulos de altura $f_X(x)$ e comprimento $x-d$. Dessa forma, a área pode ser calculada a partir da expressão $\sum_{x>d}(x-d)f_X(x)$. Por outro lado, sabe-se que área total da região cinzenta é igual a $\int_d^\infty [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x$.

Para provar a igualdade no caso contínuo reescreve-se $x-d$ na forma $\int_d^x 1\mathrm{d}y$ e usa-se o Teorema de Fubini, obtendo-se

$$\begin{aligned}\int_d^\infty (x-d)f_X(x)\,\mathrm{d}x &= \int_d^\infty \left(\int_d^x 1\mathrm{d}y\right) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_d^\infty \int_y^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_d^\infty [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\square$

A função $\pi_X(d) = E[(X-d)_+]$, chamada transformada stop-loss de X, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\pi_X(d)$ é uma função contínua, convexa que é estritamente decrescente com d se $F_X(d) < 1$;

2. se $F_X(d) = 1$, então $\pi_X(d) = 0$;

3. $\lim_{d\to\infty} \pi_X(d) = 0$;

4. se X é não-negativo, então $\pi_X(0) = \mathbb{E}[X]$ e, para $d < 0$, $\pi_X(d)$ decresce linearmente com declive igual a -1.

Vai-se verificar estas propriedades. Pela definição de $\pi_X(\cdot)$, dada como o integral de uma função contínua à direita, resulta que é contínua. Por outro lado, é uma função convexa por definição de $\pi_X(\cdot)$. Para tal, sejam $d < \tilde{d}$ e $\alpha \in (0,1)$. Quer-se provar que

$$\alpha\pi_X(d) + (1-\alpha)\pi_X(\tilde{d}) \geq \pi_X(d^*),$$

onde $d^* = \alpha d + (1-\alpha)\tilde{d}$. Ora,

$$\begin{aligned}
\alpha\pi_X(d)+&(1-\alpha)\pi_X(\tilde{d}) \\
&= \alpha \int_d^{\infty} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int_{\tilde{d}}^{\infty} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha \int_d^{d^*} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x + \alpha \int_{d^*}^{\infty} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x \\
&+ (1-\alpha)\int_{d^*}^{\infty} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x - (1-\alpha)\int_{d^*}^{\tilde{d}} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha \int_d^{d^*} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x - (1-\alpha)\int_{d^*}^{\tilde{d}} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x + \pi_X(d^*).
\end{aligned}$$

Note que como $\alpha \in (0,1)$, $F_X(\cdot)$ é não-decrescente e $F_X(\cdot) \in [0,1]$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_d^{d^*} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x &\geq \alpha(d^*-d)[1-F_X(d^*)], \\
(1-\alpha)\int_{d^*}^{\tilde{d}} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x &\leq (1-\alpha)(\tilde{d}-d^*)[1-F_X(d^*)],
\end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned}
\alpha\pi_X(d)+&(1-\alpha)\pi_X(\tilde{d}) \\
&\geq \alpha(d^*-d)[1-F_X(d^*)] - (1-\alpha)(\tilde{d}-d^*)[1-F_X(d^*)] + \pi_X(d^*) \\
&\geq \pi_X(d^*).
\end{aligned}$$

Para se verificar que $\pi_X(d)$ é estritamente decrescente, tomemos $d < \tilde{d}$. Então,

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x = \int_d^{\tilde{d}} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{\tilde{d}}^{\infty} [1-F_X(x)]\,\mathrm{d}x > \pi_X(\tilde{d}),$$

exceto se $F_X(d) = 1$, pois nesse caso $F_X(x) = 1$, para todo $x \geq d$, donde resulta que $\pi_X(d) = \pi_X(\tilde{d}) = 0$. Pela definição de $\pi_X(\cdot)$ é fácil ver que $\lim_{d\to\infty} \pi_X(d) = 0$. Se X é não-negativo, então $\pi_X(0) = \mathbb{E}[(X)_+] = \mathbb{E}[X]$. Por outro lado, se $d < 0$ então $X - d \geq 0$, e por isso $\pi_X(d) = \mathbb{E}[X - d] = \mathbb{E}[X] - d$, que decresce linearmente com d com $\pi'_X(d) = -1$.

O próximo resultado diz que um seguro stop-loss minimiza a variância do risco retido.

Teorema 1.3.4 (Otimalidade de resseguros stop-loss)**.**

Seja $I(X)$ o pagamento para uma indemnização num contrato de resseguro, em que $X \geq 0$, representa a perda. Suponha que $0 \leq I(x) \leq x$ para todo $x \geq 0$. Então,

$$\mathbb{E}[I(X)] = \mathbb{E}[(X - d)_+] \Longrightarrow \text{Var}[X - I(X)] \geq \text{Var}[X - (X - d)_+]. \quad (1.3.2)$$

Demonstração

Como $0 \leq I(x) \leq x$ tem-se que $0 \leq \mathbb{E}[I(X)] \leq \mathbb{E}[X] = \pi_X(0)$. Como $X \geq 0$, $\pi_X(\cdot)$ é decrescente e $\lim_{d\to\infty} \pi_X(d) = 0$, então existe um valor para a retenção $d > 0$ tal que $\mathbb{E}[I(X)] = \pi_X(d) = \mathbb{E}[(X - d)_+]$. Sejam

$$V(X) = X - I(X) \text{ e } W(X) = X - (X - d)_+,$$

os riscos retidos. Como

$$\mathbb{E}[V(X)] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[I(X)] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[(X - d)_+] = \mathbb{E}[W(X)],$$

para terminar a prova basta mostrar (exercício) que

$$\mathbb{E}[\{V(X) - d\}^2] \geq \mathbb{E}[\{W(X) - d\}^2].$$

A desigualdade anterior é válida se $|V(X) - d| \geq |W(X) - d|$.

Se $X \geq d$, isto sempre se verifica porque $W(X) = d$, logo é sempre verdade que $|V(X) - d| \geq |W(X) - d| = 0$. Se $X < d$ tem-se que $W(X) = X$, logo $W(X) - d < 0$, donde resulta que

$$V(X) - d = X - I(X) - d \leq X - d = W(X) - d. \quad (1.3.3)$$

$\square$

O resultado deste teorema mostra que para contratos de resseguro em que os valores esperados dos pagamentos de indemnização para a resseguradora são iguais, a variabilidade do valor que deve ser pago pela seguradora é mínima para contratos de resseguro stop-loss.

Exemplo 1.3.5. *Suponha que o pagamento X correspondente a um contrato de resseguro stop-loss tem a seguinte distribuição:*

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.05	0.3	0.3	0.15	0.1

Sabendo que o prémio stop-loss é $\pi_X(d) = 1.325$ e que $1 < d < 2$, qual é o valor da retenção d?

Como $1 < d < 2$, então, pela definição do prémio stop-loss obtém-se

$$\pi_X(d) = \mathbb{E}[(X-d)_+] = \sum_{x>1}(x-d)f_X(x) = 2.6 - 0.85d$$

e igualando esta expressão a 1.325, determina-se o valor $d = 1.5$.

1.4 Exercícios

1. Suponha que um decisor com função utilidade $u(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, pode escolher entre dois montantes aleatórios X e Y em troca do seu capital w. As distribuições de probabilidades de X e de Y são dadas por $\mathbb{P}[X = 400] = \mathbb{P}[X = 900] = 0.5$ e $\mathbb{P}[Y = 100] = 1 - \mathbb{P}[Y = 1600] = 0.6$.

   (a) Mostre que o decisor prefere X a Y.

   (b) Determine para que valores de w ele deve rejeitar a oferta.

2. Um seguradora aceita um contrato para um risco X. Depois de receber o prémio, a seguradora possui capital $w = 100$.

   Qual é o prémio máximo P^+ que a seguradora está disposta a pagar

a uma resseguradora para que esta se encarregue do risco completo, supondo que a sua função utilidade é $u(w) = \log(w)$ e $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 36] = 0.5$?
Determine também uma aproximação para P^+.

3. Suponha que o prémio mínimo da resseguradora, para que esta se encarregue do risco do exercício anterior, é 19 e que a resseguradora também tem a função utilidade $u(w) = \log(w)$ e $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 36] = 0.5$.
Determine o capital w da empresa de resseguro.

4. Um decisor tem função utilidade $u(w) = \sqrt{w}$ e possui capital $w = 10$. Qual é o montante máximo que este decisor poderá pagar para ter cobertura face a um prejuízo aleatório X, sabendo que $X \sim$U$(0, 10)$?

5. Considere as seguintes funções utilidade:

   (a) utilidade linear;

   (b) utilidade quadrática;

   (c) utilidade logarítmica;

   (d) utilidade exponencial;

   (e) utilidade de potência.

   Mostre que estas funções têm utilidade marginal não-negativa e não-crescente.
   Mostre que o coeficiente de aversão ao risco destas funções utilidade pode ser escrito da forma $r(w) = (\gamma + \beta w)^{-1}$.

6. Suponha que um segurado com função utilidade exponencial de parâmetro α quer fazer um seguro contra um risco X. Mostre que a expressão para o prémio máximo P^+ é igual à expressão de P^-, dada por (1.2.1).

7. Usando a função utilidade exponencial com $\alpha = 0.001$, determine qual dos dois prémios tem valor mais elevado:

   (a) o prémio para $X \sim \mathcal{N}(400, 25000)$;

   (b) o prémio para $X \sim \mathcal{N}(420, 20000)$.

   Determine para que valores de α o prémio em a) é mais elevado.

8. Mostre que a aproximação para o prémio máximo $P^+ \approx \mu + \frac{1}{2} r(w-\mu)\sigma^2$ é exata se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e se $u(.)$ é exponencial.

9. Mostre que $P^- \geq \mathbb{E}[X]$ para decisores com aversão ao risco.

10. Verifique que $P^+[2X] < 2P^+[X]$ quando $w = 0$, $X \sim$Bernoulli(1/2) e
$$u(x) = \frac{2x}{3}\mathbb{1}_{x>-3/4} + (2x+1)\mathbb{1}_{-1<x<-3/4} + (3x+2)\mathbb{1}_{x<-1}.$$

11. Mostre que, para a utilidade quadrática, o coeficiente de aversão ao risco aumenta com o capital.

12. Mostre que o prémio mínimo P^- para a utilidade exponencial, decresce para o prémio líquido se o coeficiente de aversão tende a zero.

13. Que classe de funções de utilidade tem coeficiente de aversão ao risco relativo constante, i.e. $-\frac{wu''(w)}{u'(w)} \equiv \rho$?

14. Mostre que para um prémio exponencial se tem $P^-[2X] > 2P^-[X]$.

15. Um indivíduo enfrenta um risco aleatório X de distribuição Uniforme$(0, 200)$. O indivíduo pode fazer um seguro stop-loss de retenção $d = 100$ contra este risco. Nesse caso ele terá que pagar $Y = min(X, 100)$. Sabendo que o indivíduo toma as decisões baseando-se na função utlilidade

$u(x) = x^{2/5}$ e que possui o capital de 300 (u.m.), estará ele preparado para pagar o valor de 80 (u.m.) para o contrato de seguro stop-loss?

Capítulo 2

Modelo de risco individual

2.1 Distribuições mistas e riscos

Em estatística, as variáveis aleatórias são quase sempre ou discretas ou contínuas, mas no cálculo atuarial estas não são adequadas para modelar riscos. Muitas funções de distribuição usadas para modelar pagamentos em contratos de seguros têm, por um lado, partes contínuas, mas por outro lado, alguns saltos.

Seja Z o pagamento num contrato de seguro. Então existem três possibilidades:

1. O contrato é livre de indemnização, ou seja, $Z = 0$.
2. O contrato gera uma indemnização que é mais elevada do que a soma máxima assegurada M, ou seja, $Z = M$.
3. O contrato gera uma indemnização "normal", assim, $0 < Z < M$.

A função de distribuição de Z tem saltos nos pontos 0 e M e para os valores entre 0 e M é conveniente usar uma função de distribuição contínua. Assim, obtém-se uma função de distribuição que nem é puramente discreta, nem puramente contínua.

O seguinte modelo de dois estados permite construir uma variável aleatória com função de distribuição que é uma mistura de uma distribuição discreta e de uma distribuição absolutamente contínua.

Seja I uma variável aleatória indicadora de um certo evento A, ou seja, uma variável aleatória que toma apenas os valores $I=1$ ou $I=0$, onde $I=1$ indica que ocorreu o evento A. Suponha que a probabilidade de ocorrer este evento é $q=\mathbb{P}(I=1)$, $0\leq q\leq 1$. Se $I=1$, o pedido de indemnização Z é obtido através da distribuição de X, se $I=0$, através da distribuição de Y:

$$Z=I\,X+(1-I)Y.$$

Se $I=1$, então Z pode ser substituído por X, se $I=0$, por Y. Podemos considerar que X e Y são variáveis aleatórias independentes e, além disso, são independentes de I, porque, por exemplo, dado $I=0$ o valor de X é irrelevante, só as distribuições condicionais de $X|I=1$ e de $Y|I=0$ são relevantes.

A função de distribuição de Z pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z\leq z)\\
&= \mathbb{P}(Z\leq z, I=1)+\mathbb{P}(Z\leq z, I=0)\\
&= \mathbb{P}(X\leq z, I=1)+\mathbb{P}(Y\leq z, I=0)\\
&= \mathbb{P}(X\leq z|I=1)\mathbb{P}(I=1)+\mathbb{P}(Y\leq z|I=0)\mathbb{P}(I=0)\\
&= q\mathbb{P}(X\leq z)+(1-q)\mathbb{P}(Y\leq z).
\end{aligned}$$

Note que na primeira igualdade acima usou-se a definição de função de distribuição, na segunda igualdade usou-se a discretização da variável aleatória I nos dois possíveis valores que toma $I=1$ ou $I=0$, na terceira igualdade usou-se a expressão para Z e na quarta igualdade usou-se a definição de probabilidade condicional e, finalmente, na quinta igualdade usou-se a independência de X e de Y em relação a I.

Agora, sejam X uma variável aleatória discreta e Y uma variável aleatória absolutamente contínua, então

$$F_Z(z)-F_Z(z^-)=q\mathbb{P}(X=z)$$

$$F'_Z(z) = (1-q)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbb{P}(Y \le z) = (1-q)f_Y(z).$$

A notação $F(z^-)$ (resp. $F(z^+)$) é usada para representar o limite à esquerda (resp. à direita): $F(z^\pm) = \lim_{h\to 0} F(z \pm h)$.

Tem-se $F(z^+) = F(z)$, porque as funções de distribuição são contínuas à direita.

Para calcular os momentos de Z, a função geradora de momentos $\mathbb{E}[e^{tZ}]$ e o prémio stop-loss $\mathbb{E}[(Z-d)_+]$ é preciso calcular a esperança matemática de funções de Z. Para isso usa-se a fórmula iterativa de esperanças condicionais

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W|V]],$$

onde W e V são variáveis aleatórias quaisquer.

Aplicando esta fórmula, substituindo W por $g(Z)$, em que $g(\cdot)$ é uma função apropriada, e V por I, obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Z)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(Z)|I]] \\
&= q\mathbb{E}[g(Z)|I=1] + (1-q)\mathbb{E}[g(Z)|I=0] \\
&= q\mathbb{E}[g(X)|I=1] + (1-q)\mathbb{E}[g(Y)|I=0] \\
&= q\mathbb{E}[g(X)] + (1-q)\mathbb{E}[g(Y)] \\
&= q\sum_z g(z)\mathbb{P}(X=z) + (1-q)\int_{-\infty}^{\infty} g(z)f_Y(z)\mathrm{d}z \\
&= \sum_z g(z)[F_Z(z) - F_Z(z^-)] + \int_{-\infty}^{\infty} g(z)F'_Z(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Definição 2.1.1. *(Integral de Riemann-Stieltjes)*

O integral de Riemann-Stieltjes para distribuições mistas, é definido por

$$\mathbb{E}[g(Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\mathrm{d}F(z),$$

onde F é uma função de distribuição, o diferencial $\mathrm{d}F(z) = F(z) - F(z-\mathrm{d}z)$ *representa a probabilidade de z, isto é, o tamanho do salto em z, se este existir; ou $F'(z)\mathrm{d}z$, se não existir salto em z.*

Definição 2.1.2. *(Variáveis aleatórias e distribuições mistas)*

Uma função de distribuição mista absolutamente contínua/discreta $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$ *surge quando se considera uma mistura de variáveis aleatórias*

$$Z = I\,X + (1-I)Y, \tag{2.1.1}$$

em que X *é uma variável aleatória discreta,* Y *é uma variável aleatória absolutamente contínua e* I *uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli*(q) *e que é independente de* X *e de* Y*.*

A função de distribuição de Z *é uma mistura das funções de distribuição de* X *e de* Y*, pois*

$$F_Z(z) = qF_X(z) + (1-q)F_Y(z).$$

Para a esperança de funções $g(\cdot)$ de Z tem-se

$$\mathbb{E}[g(Z)] = q\mathbb{E}[g(X)] + (1-q)\mathbb{E}[g(Y)].$$

Exemplo 2.1.3. *(Seguro contra roubo de bicicletas)*

Considere uma apólice contra o furto de bicicletas, em que é pago o valor b *se a bicicleta for roubada. O número de pagamentos é* 0 *ou* 1 *e o montante do pagamento* b *é conhecido desde o início. Suponha que a probabilidade do furto é* $q \in (0,1)$ *e seja* $X = Ib$ *o valor do pagamento da indemnização, onde* I *é a variável aleatória com distribuição de Bernoulli*(q)*, onde* $I = 1$ *se a bicicleta for roubada e* $I = 0$ *caso contrário. Para fazer um paralelismo com o que se viu atrás, note que* X *pode ser escrita na forma* $X = Ib = Ib + (1-I)0$*, ou seja* X *é uma variável aleatória escrita como em* (2.1.1)*, sendo que uma variável é nula.*

A distribuição e os momentos de X *podem ser obtidos a partir de* I*:*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X = b) = \mathbb{P}(I = 1) = q,\\
&\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(I = 0) = 1-q,\\
&\mathbb{E}[X] = b\mathbb{E}[I] = bq,\\
&Var[X] = b^2 Var[I] = b^2 q(1-q).
\end{aligned}$$

Suponha agora que só é pago metade do montante da indeminização, no caso da bicicleta não ter estado com o cadeado no momento do roubo. Então, neste caso, $X = IB$, *mas* B *não é constante como acima (igual a b), mas* B *representa um pagamento aleatório. Assumindo que a probabilidade dos pedidos de indemnização* $X = 400$ *e* $X = 200$ *é* 0.05 *e* 0.15, *respetivamente, obtém-se*

$$\mathbb{P}(I = 1, B = 400) = \mathbb{P}(X = 400) = 0.05$$
$$\mathbb{P}(I = 1, B = 200) = \mathbb{P}(X = 200) = 0.15$$

Assim, $\mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(I = 1, B = 400) + \mathbb{P}(I = 1, B = 200) = 0.2$ *e, consequentemente,* $\mathbb{P}(I = 0) = 0.8$. *Ora,*

$$\mathbb{P}(B = 400 | I = 1) = \frac{\mathbb{P}(B = 400, I = 1)}{\mathbb{P}(I = 1)} = 0.25,$$

que representa a probabilidade condicional da bicicleta ter estado com o cadeado, dado o facto desta ter sido roubada.

Exemplo 2.1.4. *(Indemnização exponencial)*

Suponha que um risco X *tem a seguinte distribuição*

1. $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$;
2. $\mathbb{P}(X \in [x, x + \mathrm{d}x)) = \frac{1}{2}\beta e^{-\beta x}\mathrm{d}x$ *para* $\beta = 0.1$, $x > 0$.

Vai-se começar por calcular o valor esperado de X. *Note que a variável aleatória* X *não é contínua, porque a função de distribuição tem um salto em* 0, *mas também não é discreta, porque a derivada* $\mathbb{P}(x \le X < x + \mathrm{d}x)/\mathrm{d}x$ *é positiva para* $x > 0$.

Podemos calcular $\mathbb{E}[X]$ *usando o integral de Riemann-Stieltjes. Então*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}F_X(x) = 0\, \mathbb{P}(X = 0) + \int_0^{\infty} x\, F_X'(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x\beta e^{-\beta x}\mathrm{d}x = 5. \end{aligned}$$

Agora, pretende-se saber qual é o prémio máximo P^+ para X, que um indivíduo com função de utilidade exponencial com coeficiente de aversão ao risco $\alpha = 0.01$ está disposto a pagar.

Se a função de utilidade do segurado é exponencial com parâmetro $\alpha = 0.01$, então o prémio máximo P^+ toma o valor:

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)) \\ &= \frac{1}{\alpha}\log\left(e^0\mathbb{P}(X=0) + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{\alpha x}\beta e^{-\beta x}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right) \\ &= 100\log\left(\frac{19}{18}\right) \approx 5.4. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.5. *(Apólice com cobertura máxima)*

Considere uma apólice de seguro contra uma perda S. Pretende-se determinar a função de distribuição do pagamento X desta apólice, quando há uma dedução de 100 u.m. e um pagamento máximo no valor de 1000 u.m. Para ser mais preciso, se $S \leq 100$ então $X = 0$ e se $S \geq 1100$ então $X = 1000$, caso contrário $X = S - 100$. A probabilidade de uma perda "positiva", ou seja, $S > 100$, é 0.10 e a probabilidade de uma perda grande, ou seja $S \geq 1100$, é 0.02. Dado $S \in (100, 1100)$, suponha que S tem distribuição uniforme.

Novamente, escrevemos $X = IB$, onde I representa o número de pagamentos (0 ou 1) e B representa o montante pago. Assim,

$$\mathbb{P}(B = 1000|I = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1000)}{0.1} = 0.2$$
$$\mathbb{P}(B \in (x, x+\mathrm{d}x)|I = 1) = \frac{\mathbb{P}(X \in (x, x+\mathrm{d}x))}{0.1} = c\,\mathrm{d}x, \quad \textit{se} \quad x \in (0, 1000).$$

Note que a igualdade anterior resulta do facto de que S tem distribuição uniforme em $(100, 1100)$ e $X = S - 100$.

Integrando a expressão anterior obtém-se $c = 0.0008$. Para tal, note que *a variável aleatória X toma os valores 0 e 1000 com probabilidade:*

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(S\le 100)=1-\mathbb{P}(S\ge 100)=1-0.1=0.9$$
$$\mathbb{P}(X=1000)=\mathbb{P}(S\ge 1100)=0.02,$$

respetivamente, e no intervalo $(0,1000)$ tem distribuição uniforme. Logo

$$\int_0^{1000} 0.1\times c\,\mathrm{d}x+\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1000)=1.$$

Ou seja,

$$100c=1-0.9-0.02=0.08,$$

donde resulta que $c=0.0008$.

Logo, a distribuição condicional de B dado $I=1$ não é discreta nem contínua.

Vai-se agora calcular a função de distribuição de X. Ora,

$$\begin{aligned} F_X(x)=&\mathbb{P}(X\le x)=\mathbb{P}(IB\le x)\\ =&\mathbb{P}(IB\le x|I=0)\mathbb{P}(I=0)+\mathbb{P}(IB\le x|I=1)\mathbb{P}(I=1).\end{aligned}$$

Logo:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0\times 0.9+0\times 0.1=0, & x<0\\ 1\times 0.9+cx\times 0.1, & x\in[0,1000)\\ 1\times 0.9+1\times 0.1=1, & x\ge 1000\end{cases}.$$

A diferencial é

$$\mathrm{d}F_X(x)=\begin{cases} 0.9, & x=0\\ 0.1\times c\,\mathrm{d}x, & x\in(0,1000)\\ 0.02, & x=1000\\ 0, & \textit{caso contrário}\end{cases}.$$

A variância de riscos da forma $X=IB$ pode ser calculada através da distribuição condicional de B dado I usando a regra de decomposição da variância, conhecida por fórmula da decomposição da variância

$$\mathrm{Var}[W]=\mathrm{Var}[\mathbb{E}[W|V]]+\mathbb{E}[\mathrm{Var}[W|V]].$$

Sejam $q = \mathbb{P}(I = 1)$, $\mu = \mathbb{E}[B]$ e $\sigma^2 = \text{Var}[B]$. Tem-se

$$\mathbb{E}[X|I = 1] = \mathbb{E}[B|I = 1] = \mathbb{E}[B] = \mu,$$

$$\mathbb{E}[X|I = 0] = \mathbb{E}[0|I = 0] = 0,$$

logo $\mathbb{E}[X|I = i] = \mu i$, $i = 0, 1$, e, analogamente, $\text{Var}[X|I = i] = \sigma^2 i$. Para tal, se $i = 1$, note que,

$$\text{Var}[X|I=1] = \mathbb{E}[X^2|I=1] - (\mathbb{E}[X|I=1])^2 = \mathbb{E}[B^2|I=1] - (\mathbb{E}[B|I=1])^2 = \text{Var}[B] = \sigma^2.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[X|I] = \mu I \\ &\text{Var}[X|I] = \sigma^2 I. \end{aligned}$$

Daqui resulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|I]] = \mathbb{E}[\mu I] = \mu q \\ \text{Var}[X] &= \text{Var}[\mathbb{E}[X|I]] + \mathbb{E}[\text{Var}[X|I]] = \text{Var}[\mu I] + \mathbb{E}[\sigma^2 I] \\ &= \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q. \end{aligned}$$

2.2 Convolução

No modelo de risco individual pretende-se saber qual é a distribuição de S, ou seja, do valor total das indemnizações de um número de apólices, com

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

onde X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, representa o pagamento associado à i-ésimo contrato. Assume-se que os riscos X_i são variáveis aleatórias independentes.

Vai-se calcular a função de distribuição de $X + Y$ a partir da função de distribuição das variáveis aleatórias X e Y, que se assumem independentes, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(s) &= \mathbb{P}(X+Y \leq s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X+Y \leq s | X = x)\mathrm{d}F_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y \leq s - X | X = x)\mathrm{d}F_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y \leq s - x)\mathrm{d}F_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x)\mathrm{d}F_X(x) =: F_X * F_Y(s).
\end{aligned}$$

Definição 2.2.1. *(Convolução)*

A convolução $F_X * F_Y(\cdot)$ das funções de distribuição $F_X(\cdot)$ e $F_Y(\cdot)$ é definida por

$$F_X * F_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x)\mathrm{d}F_X(x).$$

Se X e Y são variáveis aleatórias absolutamente contínuas então

$$F_X * F_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x) f_X(x)\mathrm{d}x,$$

e derivando em ordem a s, obtemos a densidade

$$f_X * f_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(s-x) f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Para o caso em que X e Y são variáveis aleatórias discretas, tem-se

$$F_X * F_Y(s) = \sum_x F_Y(s-x) f_X(x),\ f_X * f_Y(s) = \sum_x f_Y(s-x) f_X(x).$$

A operação convolução $*$ tem as seguintes propriedades:

1. é comutativa, $F_X * F_Y = F_Y * F_X$, pois $X+Y \equiv Y+X$;

2. é associativa, $(F_X * F_Y) * F_Z = F_X * (F_Y * F_Z) = F_X * F_Y * F_Z$, pois para calcular a função de distribuição de $X+Y+Z$, não interessa a ordem em que fazemos a convolução.

A função de distribuição da soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas em que cada uma tem função de distribuição F

é a função de distribuição que corresponde à convolução das n funções de distribuição F e que se escreve da forma

$$F * F * \cdots * F =: F^{*n}.$$

Exemplo 2.2.2. *(Convolução de duas funções de distribuição Uniforme)*

Suponha que $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ e $Y \sim \mathcal{U}(0,2)$ são independentes. vai-se determinar a função de distribuição de $S = X + Y$.

Como X tem distribuição uniforme em $(0,1)$, então X tem distribuição absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$. Logo, a função de distribuição de X, que por definição é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t,$$

pode ser escrita da forma

$$F_X(x) = x\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x).$$

Como Y é absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2)}(y),$$

tem-se que

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(s-y)\mathrm{d}F_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(s-y) f_Y(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Pela expressão de f_Y tem-se que

$$F_S(s) = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} F_X(s-y)\mathrm{d}y.$$

Fazendo uma mudança de variável $s - y = z$, obtém-se

$$F_S(s) = \frac{1}{2}\int_{s-2}^{s} F_X(z)\mathrm{d}z.$$

Uma vez que a função de distribuição de X está definida por ramos, tem-se que considerar os seguintes casos $s \in [0,1)$, $s \in [1,2)$ e $s \in [2,3)$. Vai-se começar por $s \in [0,1)$. Neste caso $s-2<0$, logo

$$F_S(s) = \frac{1}{2}\int_{s-2}^{s} F_X(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{0}^{s} F_X(z)\mathrm{d}z, \tag{2.2.1}$$

pois quando $x<0$, $F_X(x)=0$. Agora, como $s \in [0,1)$, tem-se que $F_X(z)=z$, donde resulta que

$$F_S(s) = \frac{1}{2}\int_{0}^{s} z\mathrm{d}z = \frac{s^2}{4}.$$

Considere agora $s \in [1,2)$. Neste caso também se tem que $s-2<0$, logo (2.2.1) também é válida. Mas neste caso $s \in [1,2)$, logo

$$\begin{aligned} F_S(s) =& \frac{1}{2}\int_{0}^{1} F_X(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_{1}^{s} F_X(z)\,\mathrm{d}z \\ =& \frac{1}{2}\int_{0}^{1} z\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_{1}^{s} 1\,\mathrm{d}z \\ =& \frac{2s-1}{4}. \end{aligned}$$

Finalmente, se $s \in [2,3)$, tem-se que $s-2 \in (0,1)$. Logo,

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \frac{1}{2}\int_{s-2}^{s} F_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{s-2}^{1} F_X(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_{1}^{s} F_X(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{s-2}^{1} z\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_{1}^{s} 1\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{-s^2+6s-5}{4}. \end{aligned}$$

Se $s \geq 3$, tem-se que $F_S(s)=1$. Resumindo,

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_{0}^{s} F_X(s-y)\mathrm{d}F_Y(y) \\ &= \frac{s^2}{4}\mathbb{1}_{[0,1)}(s) + \frac{2s-1}{4}\mathbb{1}_{[1,2)}(s) + \frac{-s^2+6s-5}{4}\mathbb{1}_{[2,3)}(s) \\ &+ \mathbb{1}_{[3,+\infty)}(s). \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3. *(Convolução de distribuições discretas)*

Sejam $f_1(x) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ *para* $x = 0,1,2$, $f_2(x) = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ *para* $x = 0,2$ *e* $f_3(x) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ *para* $x = 0,2,4$. *Passemos a representar a convolução de* f_1 *e* f_2 *por* f_{1+2} *e a convolução de* f_1, f_2 *e* f_3 *por* f_{1+2+3}. *Para calcular* F_{1+2+3} *é preciso efetuar os cálculos indicados na seguinte tabela.*

x	$f_1(x)$	$*$	$f_2(x)$	$=$	$f_{1+2}(x)$	$*$	$f_3(x)$	$=$	$f_{1+2+3}(x)$	$\Rightarrow$	$F_{1+2+3}(x)$
0	1/4		1/2		1/8		1/4		1/32		1/32
1	1/2		0		2/8		0		2/32		3/32
2	1/4		1/2		2/8		1/2		4/32		7/32
3	0		0		2/8		0		6/32		13/32
4	0		0		1/8		1/4		6/32		19/32
5	0		0		0		0		6/32		25/32
6	0		0		0		0		4/32		29/32
7	0		0		0		0		2/32		31/32
8	0		0		0		0		1/32		32/32

Vai-se calcular algumas entradas desta tabela, deixando as restantes a cargo do leitor. Começa-se por calcular $f_{1+2}(0)$. *Por definição de convolução de variáveis aleatórias discretas, tem-se que*

$$f_{1+2}(0) = \sum_x f_2(-x) f_1(x).$$

Se $x > 0$, *então* $f_2(-x) = 0$. *Por outro lado, se* $x < 0$, *então* $f_1(x) = 0$. *Logo, tem-se que*

$$f_{1+2}(0) = \sum_x f_2(-x) f_1(x) = f_2(0) f_1(0) = \frac{1}{8}.$$

Agora, calcula-se $f_{1+2}(1)$. *Ora,*

$$f_{1+2}(1) = \sum_x f_2(1-x) f_1(x) = f_2(0) f_1(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Analogamente,

$$f_{1+2}(2) = \sum_x f_2(2-x) f_1(x) = f_2(2) f_1(0) + f_2(0) f_1(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 2.2.4. *(Convolução de distribuições de Poisson)*

Sejam $X \sim Poisson(\lambda)$ e $Y \sim Poisson(\mu)$ variáveis aleatórias independentes. Então, obtém-se para $s = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(s) &= \sum_{x=0}^{s} f_Y(s-x) f_X(x) \\ &= \frac{e^{-\mu-\lambda}}{s!} \sum_{x=0}^{s} \binom{s}{x} \mu^{s-x} \lambda^x \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^s}{s!}. \end{aligned}$$

Logo, $X+Y$ tem distribuição $Poisson(\lambda+\mu)$.

2.3 Transformadas

A distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes também pode ser determinada usando transformadas da função de distribuição, como por exemplo, a função geradora de momentos.

Definição 2.3.1. *(Função geradora de momentos)*

Para uma variável aleatória não negativa X a função geradora de momentos $m_X : (-\infty, h) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida da forma

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}], \ -\infty < t < h$$

para algum h. Como a função geradora de momentos vai ser usada principalmente num intervalo em torno de 0, exige-se que $h > 0$.

Nota 2.3.2. *Unicidade: Se a função geradora de momentos de uma variável aleatória X existir, então a função geradora de momentos é única (duas variáveis aleatórias com funções distribuição diferentes não podem ter a mesma função geradora de momentos).*

Teorema 2.3.3. *Seja $S = X_1 + \cdots + X_n$, onde $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então*

$$m_S(t) = \prod_{k=1}^{n} m_{X_k}(t),$$

se todas as funções geradoras de momentos de $X_1, \cdots, X_n$ existem.

Demonstração

$$m_S(t) = \mathbb{E}[e^{St}] = \mathbb{E}[e^{(X_1+\cdots+X_n)t}] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_k}] = \prod_{k=1}^{n} m_{X_k}(t).$$

$\square$

A função geradora de momentos pode ser usada para calcular os momentos de uma variável aleatória X. Usando a expansão em série de Taylor de e^x obtém-se

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^k]t^k}{k!}$$

e o momento de ordem k de X é dado por

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} m_X(t)|_{t=0}.$$

Para variáveis aleatórias com cauda pesada, como por exemplo a distribuição de Pareto, a função geradora de momentos não existe, mas a função característica existe sempre.

Definição 2.3.4. *(Função característica)*

A função característica de uma variável aleatória X, $\phi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)], -\infty < t < \infty.$$

Definição 2.3.5. *(Função geradora de probabilidades)*

A função geradora de probabilidades é usada para variáveis aleatórias X que tomam valores no conjunto dos números naturais e é definida por

$$g_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(X = k).$$

As probabilidades $\mathbb{P}(X = k)$ são os coeficientes na expansão em série da função geradora de probabilidades. A série converge se $|t| \leq 1$.

Definição 2.3.6. *(Função geradora de cumulantes)*

A função geradora de cumulantes é definida por

$$\kappa_X(t) = \log\left(m_X(t)\right).$$

A função geradora de cumulantes é útil para calcular, por exemplo, o terceiro momento central.

Calculando as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem de $\kappa_X(t)$ e tomando $t = 0$, conclui-se que os coeficientes de $\frac{t^k}{k!}$ para $k = 1,2,3$ são $\mathbb{E}[X]$, Var$[X]$ e $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]$, respetivamente.

Para tal, note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\kappa_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(m_X(t))\Big|_{t=0} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_X(t)}{m_X(t)}\Big|_{t=0} = \frac{\mathbb{E}[Xe^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]}\Big|_{t=0} = \mathbb{E}[X],$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\kappa_X(t)\Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbb{E}[Xe^{tX}]}{\mathbb{E}[e^{tX}]}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathbb{E}[X^2e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tX}] - (\mathbb{E}[Xe^{tX}])^2}{(\mathbb{E}[e^{tX}])^2}\Big|_{t=0}\\ &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = Var[X],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\kappa_X(t)\Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbb{E}[X^2e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tX}] - (\mathbb{E}[Xe^{tX}])^2}{(\mathbb{E}[e^{tX}])^2}\right)\Big|_{t=0}\\ &= \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X] + 2(\mathbb{E}[X])^3 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3].\end{aligned}$$

As quantidades obtidas acima chamam-se cumulantes de X e são representados por κ_k, $k = 1,2,\ldots$.

Um processo alternativo para calcular os cumulantes é o seguinte. Seja $\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$ e sejam $O(t^k)$ os "termos de ordem k ou de ordem superior a k". Então,

$$m_X(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{1}{2}\mu_2 t^2 + \frac{1}{6}\mu_3 t^3 + O(t^4)$$

e usando $\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + O(z^4)$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\log(m_X(t)) =& \log\left(1 + \mu_1 t + \frac{1}{2}\mu_2 t^2 + \frac{1}{6}\mu_3 t^3 + O(t^4)\right) \\
=& \mu_1 t + \frac{1}{2}\mu_2 t^2 + \frac{1}{6}\mu_3 t^3 + O(t^4) \\
& -\frac{1}{2}\left[\mu_1^2 t^2 + \mu_1\mu_2 t^3 + O(t^4)\right] \\
& +\frac{1}{3}\left[\mu_1^3 t^3 + O(t^4)\right] + O(t^4) \\
=& \mu_1 t + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)t^2 + \frac{1}{6}(\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3)t^3 + O(t^4) \\
=& \mathbb{E}[X]t + \mathrm{Var}[X]\frac{1}{2}t^2 + \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]\frac{1}{6}t^3 + O(t^4).
\end{aligned}$$

Definição 2.3.7. *(Coeficiente de assimetria)*

A assimetria de uma variável aleatória X é definida pelo coeficiente de assimetria

$$\gamma_X = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3},$$

onde $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $\sigma^2 = Var[X]$.

Se $\gamma_X > 0$ é provável que surjam valores elevados de $X - \mu$, então a cauda direita da função de distribuição é pesada. Se $\gamma_X < 0$, então a cauda esquerda é pesada. Se X é simétrica, então $\gamma_X = 0$. O recíproco é falso!

A função geradora de cumulantes, a função característica e a função geradora de momentos satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\kappa_X(t) &= \log m_X(t), \\
g_X(t) &= m_X(\log(t)), \\
\phi_X(t) &= m_X(it).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.8.

Considere o modelo de risco individual $S = X_1 + \cdots + X_n$, em que X_i, $i = 1, \ldots, n$, são variáveis aleatórias independentes. Determine $\mathbb{E}[S]$, $Var[S]$ e $g_S(t)$ para o caso em que os riscos são da forma $X_i = I_i b_i$, com $I_i \sim$ Bernoulli(q_i) e b_i são valores fixos para $i = 1, \ldots, n$.

Como X_i, $i = 1, ..., n$, *são independentes com* $\mathbb{E}[X_i] = b_i q_i$ *e* $Var[X_i] = b_i^2 q_i(1-q_i)$, *então*

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} b_i q_i$$

e

$$Var[S] = Var[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 q_i(1-q_i).$$

Para a função geradora de probabilidades tem-se

$$g_S(t) = \mathbb{E}[t^S] = \mathbb{E}[t^{X_1+\cdots+X_n}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[t^{X_i}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[t^{I_i b_i}],$$

onde $\mathbb{E}[t^{I_i b_i}] = \mathbb{E}\left[\left(t^{b_i}\right)^{I_i}\right] = m_{I_i}\left(\log\left(t^{b_i}\right)\right)$, *que é a função geradora de momentos de uma variável aleatória de Bernoulli. Assim, obtém-se*

$$m_{I_i}\left(\log\left(t^{b_i}\right)\right) = 1 - q_i + q_i e^{\log t^{b_i}} = 1 - q_i + q_i t^{b_i}$$

e a função geradora de probabilidades pode escrever-se da forma

$$g_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - q_i + q_i t^{b_i}\right).$$

2.4 Aproximações

2.4.1 Aproximação Normal

Um método muito conhecido que permite aproximar uma função de distribuição usando a função de distribuição Normal Φ é o Teorema Central do Limite (TCL).

Teorema 2.4.1. *(Teorema Central do Limite)*

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ *são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média* μ *e variância* $\sigma^2 < \infty$, *então se* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\mu + x\sigma\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Deste teorema resulta que podemos aproximar a função de distribuição de $X_1+X_2+\cdots+X_n$ através de

$$F_S(s) \approx \Phi\left(s; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i], \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]\right).$$

Esta aproximação pode ser usada se n for suficientemente grande.

Exemplo 2.4.2.

Suponha que 1000 *indivíduos fazem um seguro de vida para um período de 1 ano. A probabilidade de cada indivíduo morrer nesse ano é* 0.001 *e o pagamento para cada morte é 1 u.m. Qual é a probabilidade do pagamento total ser pelo menos 4 u.m.?*

O pagamento total tem distribuição Binomial(1000,0.001) e como $n = 1000$ *é elevado e* $p = 0.001$ *pequeno, podemos aproximar esta probabilidade pela distribuição de Poisson com parâmetro* $np = 1$.

Calculando a probabilidade em $3+\frac{1}{2}$ *em vez de em 4, aplicando depois uma correção de continuidade, tem-se*

$$\mathbb{P}(S \geq 3.5) = 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{6}e^{-1} = 0.01899.$$

Note-se que a probabilidade binomial exata pode ser calculada e é igual a 0.01893.

Usando o TCL com $\mu = \mathbb{E}[S] = 1$ *e* $\sigma^2 = Var[S] = 1$, *obtém-se*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \geq 3.5) &= \mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \geq \frac{3.5-\mu}{\sigma}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(2.5) = 0.0062. \end{aligned}$$

Apesar de n ser elevado, o TCL não dá uma boa aproximação por causa da assimetria dos termos $X_i, i = 1,\ldots,n$, *e, assim, de* S, *que tem como coeficiente de assimetria* $\gamma_S = 1$.

Outros métodos de aproximação, que são mais adequados do que o TCL são: a aproximação Gama transladada (translated gamma approximation) e a aproximação NP (normal power approximation).

2.4.2 Aproximação Gama transladada

A maior parte das distribuições agregadas têm uma forma muito semelhante à distribuição Gama: assimétrica à direita ($\gamma > 0$), suporte não-negativo e são unimodais. Além dos parâmetros usuais α e β acrescentamos um terceiro grau de liberdade permitindo uma translação de uma distância x_0. Desta forma podemos aproximar a função de distribuição de S à função de distribuição de $Z+x_0$, onde $Z \sim$Gama(α,β). Escolhemos α, β e x_0 de modo que os primeiros três momentos da nova variável aleatória sejam iguais aos de S.

A aproximação Gama transladada pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&F_S(s) \approx G(s-x_0;\alpha,\beta), \text{ onde}\\
&G(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta y}\mathrm{d}y,\ x \geq 0.
\end{aligned}$$

$G(x;\alpha,\beta)$ é a função de distribuição Gama. Note que se $Z \sim Gama(\alpha,\beta)$ então $\mathbb{E}[Z] = \alpha/\beta$, $\mathrm{Var}[Z] = \alpha/\beta^2$ e $\gamma_Z = 2/\sqrt{\alpha}$. Os parâmetros α, β e x_0 devem ser tais que

$$\mu = \mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[Z+x_0] = \frac{\alpha}{\beta} + x_0, \tag{2.4.1}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[Z+x_0] = \mathrm{Var}[Z] = \frac{\alpha}{\beta^2}, \tag{2.4.2}$$

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}[(S-\mathbb{E}[S])^3]}{\sigma^3} = \frac{\mathbb{E}[(Z+x_0-\mathbb{E}[Z+x_0])^3]}{\sigma^3_{Z+x_0}} = \frac{\mathbb{E}[(Z-\mathbb{E}[Z])^3]}{\sigma^3_Z} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \tag{2.4.3}$$

obtendo-se $\alpha = 4/\gamma^2$ de (2.4.3); de (2.4.2) e da igualdade anterior obtém-se $\beta^2 = \alpha/\sigma^2 = 4/(\gamma\sigma)^2$; de (2.4.1) e das duas igualdades anteriores obtém-se $x_0 = \mu - \alpha/\beta = \mu - 2\sigma/\gamma$, ou seja,

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2},\ \beta = \frac{2}{\gamma\sigma} \text{ e } x_0 = \mu - \frac{2\sigma}{\gamma}. \tag{2.4.4}$$

Note que se $X \sim$Poisson(λ), então $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $\mathrm{Var}[X] = \lambda$ e $\gamma_X = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Para provar as igualdades anteriores, usa-se a função geradora de momentos de X

que é igual a $m_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ e obtém-se os momentos de X através das derivadas de $m_X(t)$ da seguinte forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}m_X(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_X(t)\,(1+\lambda e^t)$$
$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}m_X(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_X(t)\,(1+\lambda e^t+2\lambda e^t+\lambda^2 e^{2t})$$

Ora,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_X(0) = \lambda, \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}m_X(0) = \lambda+\lambda^2,$$
$$\mathbb{E}[X^3] = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}m_X(0) = \lambda(1+3\lambda+\lambda^2),$$

donde resulta que

$$\mathbb{E}[X] = \lambda,$$
$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2 = \lambda,$$
$$\sigma_X = \frac{\lambda(1+3\lambda+\lambda^2)-3(\lambda+\lambda^2)\lambda+2\lambda^3}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Então se $S \sim$Poisson(1), tem-se que $\mu = \sigma = \gamma = 1$, o que implica, por (2.4.4) que $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $x_0 = -1$. Logo, $\mathbb{P}(S \geq 3.5) \approx 1-G(3.5-(-1);4,2) = 0.0212$.

Este valor está mais próximo do valor exato, do que o valor obtido pelo TCL.

Exemplo 2.4.3.

Suponha que a indemnização agregada S tem valor esperado 10000, desvio-padrão 1000 e coeficiente de assimetria 1. Determine $\mathbb{P}(S > 13000)$.

A partir das fórmulas que relacionam α, β e x_0 com μ, σ, γ, obtém-se $\alpha = 4$, $\beta = 0.002$, $x_0 = 8000$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > 13000) &\approx 1-G(13000-8000;4,0.002)\\ &= 1-G(5000;4,0.002)\\ &= 0.010.\end{aligned}$$

Usando a aproximação do TCL obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > 13000) &= \mathbb{P}\Big(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{13000-\mu}{\sigma}\Big) \\ &\approx 1-\Phi(3) \\ &= 0.0013. \end{aligned}$$

2.4.3 Aproximação NP

Definição 2.4.4. *(Aproximação NP)*

Sejam $\mathbb{E}[S]=\mu$, $Var[S]=\sigma^2$ *e* $\gamma_S=\gamma$, *então para* $s \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)\right) \approx \Phi(s),$$

ou, equivalentemente, para $x \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi\left(\sqrt{\frac{9}{\gamma^2}+\frac{6x}{\gamma}+1}-\frac{3}{\gamma}\right).$$

Para obter esta equivalência, note que resolvendo a equação de segundo grau $x=s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)$ em ordem a s, obtém-se $s=\sqrt{\frac{9}{\gamma^2}+\frac{6x}{\gamma}+1}-\frac{3}{\gamma}$, como se queria.

Ora, se $S \sim$Poisson(1), então, aplicando a aproximação NP, obtém-se

$$\mathbb{P}\,(S \geq 3.5) \approx 1-\Phi(2) = 0.0228.$$

Suponha que se pretende determinar o capital que cobre a perda S com 95% de probabilidade. Então,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)\right) \approx \Phi(s) = 0.95 \;\; \text{se} \;\; s=1.645.$$

Assim, o quantil de 95% de S é

$$\mathbb{E}[S]+\sigma\left(1.645+\frac{1}{6}(1.645^2-1)\right) = 10000+1929 = 11929.$$

Para determinar a probabilidade do capital 13000 não ser suficiente para cobrir a perda S, aplicamos a fórmula (2.4.4) da definição da aproximação NP com $\mu = 10000$, $\sigma = 1000$ e $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > 13000) &= \mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} > 3\right) \approx 1 - \Phi(\sqrt{9+6\times 3+1} - 3) \\ &= 1 - \Phi(2.29) = 0.011. \end{aligned}$$

Exemplo 2.4.5. *(Justificando a aproximação NP)*

Seja $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ e considere $Y = U + \frac{\gamma}{6}(U^2-1)$. Uma conta simples mostra que, se $w(x) = \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 + \frac{6x}{\gamma}}$, então

$$F_Y(x) = \Phi\Big(-\frac{3}{\gamma} + w(x)\Big) - \Phi\Big(-\frac{3}{\gamma} - w(x)\Big) \approx \Phi\Big(-\frac{3}{\gamma} + w(x)\Big). \quad (2.4.5)$$

Para provar a igualdade acima, note que

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(U + \frac{\gamma}{6}(U^2-1) \le x).$$

Resolvendo a equação de segundo grau $u + \frac{\gamma}{6}(u^2-1) - x = 0$ em ordem a u, obtém-se $u\pm = -\frac{3}{\gamma} \pm w(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} F_Y(x) = \mathbb{P}(u_- \le U \le u_+) &= \mathbb{P}(U \le u_+) - \mathbb{P}(U \le u_-) \\ &= \Phi\Big(-\frac{3}{\gamma} + w(x)\Big) - \Phi\Big(-\frac{3}{\gamma} - w(x)\Big). \end{aligned}$$

Em geral o termo $\Phi\Big(-\frac{3}{\gamma} - w(x)\Big)$ é negligenciável e tende a zero quando γ tende a zero.

Além disso, usando o facto de que $\mathbb{E}[U^2] = 1$, $\mathbb{E}[U^4] = 3$ e $\mathbb{E}[U^6] = 15$, pode-se provar que, para γ pequeno, se tem que $\mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = 1 + O(\gamma^2)$ e $\mathbb{E}[Y^3] = \gamma(1 + O(\gamma^2))$. Deixamos esta conta para o leitor.

Logo os três primeiros momentos de Y e de $\frac{S-\mu}{\sigma}$ são muito próximos.

Isso e (2.4.5), justificam a aproximação da distribuição de $\frac{S-\mu}{\sigma}$ pela aproximação NP.

Exemplo 2.4.6. *(Obtendo a aproximação NP usando a expansão de Edgeworth)*

Pode-se obter a expressão $\mathbb{P}\Big(\frac{S-\mu}{\sigma} \le s + \frac{\gamma}{6}(s^2-1)\Big) \approx \Phi(s)$, usando uma certa expansão da função de distribuição.

Seja $Z = \frac{S-\mu}{\sigma}$ *e seja* $\gamma = \mathbb{E}[Z^3]$ *o coeficiente de assimetria de* Z *e de* S. *Antes de prosseguir vai-se provar que os coeficientes de assimetria de* S *e* Z *são iguais. Note que, como* Z *satisfaz* $\mathbb{E}[Z] = 0$ *e* $\sigma_Z^2 = Var[Z] = 1$, *se tem que*

$$\gamma_Z = \frac{\mathbb{E}[(Z-\mathbb{E}[Z])^3]}{\sigma_Z^3} = \mathbb{E}[Z^3]. \tag{2.4.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\gamma_Z = \mathbb{E}[Z^3] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{S-\mu}{\sigma}\right)^3\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}[S^3] - 3\mathbb{E}[S^2]\mathbb{E}[S] + 2(\mathbb{E}[S^2])}{\sigma_S^3} \\ &= \gamma_S.\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

A função geradora de cumulantes de Z *satisfaz:*

$$\log(m_Z(t)) = \frac{t^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{6} + \ldots.$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros da igualdade anterior e aplicando depois a expansão de Taylor da função exponencial a $e^{\frac{\gamma t^3}{6}}$ *resulta que*

$$m_Z(t) = e^{t^2/2}\left(1 + \frac{\gamma t^3}{6} + \ldots\right).$$

Por outro lado, uma conta simples, usando integração por partes várias vezes, mostra que, se $\varphi(x)$ *é a função densidade da distribuição* $\mathcal{N}(0,1)$, *então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\varphi^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x = -t^3 e^{t^2/2}.$$

Como $m_Z(t) = e^{t^2/2} + \frac{\gamma t^3}{6} e^{t^2/2} + \ldots$, *reconhecemos a função de distribuição de* Z, *na forma:*

$$F_Z(t) = \Phi(x) - \frac{\gamma}{6}\Phi^{(3)}(x) + \ldots.$$

Para obter a aproximação NP a partir desta fórmula, conhecida como expansão de Edgeworth, vai-se encontrar δ *tal que* $F_Z(s+\delta) \approx \Phi(s)$. *Para tal, seja*

$g(\delta) = \Phi(s) - (\Phi(s+\delta) - \frac{1}{6}\gamma\Phi^{(3)}(s+\delta))$. *Pretende-se encontrar* δ *tal que* $g(\delta) = 0$. *Usando a aproximação* $g(\delta) \approx g(0) + \delta g'(0)$, *obtém-se*

$$\delta \approx -\frac{g(0)}{g'(0)}.$$

Ora, $g(0) = \frac{1}{6}\gamma\Phi^{(3)}(s)$ *e* $g'(\delta) = -\Phi'(s+\delta) + \frac{1}{6}\gamma\Phi^{(4)}(s+\delta)$, *logo,*

$$\delta \approx \frac{-\frac{\gamma}{6}(s^2-1)}{-1+\frac{\gamma}{6}(-s^3+3s)}.$$

Ignorando o termo com γ *no denominador, obtém-se que* $F_Z(s+\delta) \approx \Phi(s)$ *quando* $\delta = \frac{\gamma}{6}(s^2-1)$, *que é exatamente a aproximação NP que obtivemos anteriormente.*

Exemplo 2.4.7.

De um montante total de indemnizações S *associado a uma carteira de apólices sabe-se que* $E(S) = 100$, $E(S^2) = 10100$, $E(S^3) = 1031 \times 10^3$ *e* $\mathrm{Var}(S) = 100$.

Determine, usando o método de aproximação NP,

a) a probabilidade do capital 120 não ser suficiente para cobrir a perda S;

b) o capital que cobre S *com probabilidade de 99%.*

a) Pretende-se determinar $\mathbb{P}(S > 120)$, *que pode ser reescrita da forma*

$$\mathbb{P}(S>120) = \mathbb{P}\left(\frac{S-\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} > \frac{120-100}{100}\right) = 1-\mathbb{P}\left(\frac{S-\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \le 2\right).$$

Calculando o coeficiente de assimetria obtém-se

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}[(S-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mathbb{E}[S^3] - 3\mathbb{E}[S]\mathbb{E}[S^2] + 2\mathbb{E}[S]^3}{(\mathrm{Var}[S])^{3/2}} = 1$$

Então, aplicando a aproximação NP, vem

$$1-\mathbb{P}\left(\frac{S-\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \le 2\right) \approx 1-\Phi\left(\sqrt{9+6.2+1}-3\right) \approx 1-\Phi(1.69) = 0.0458.$$

Logo, a probabilidade do capital 120 não ser suficiente para cobrir a perda S *é aproximadamente 5%.*

b) Dado que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)\right) \approx \Phi(s) = 0.99,$$

então o valor correspondente de s é $s = 2.326$ e o capital que cobre S com a probabilidade de 99% pode ser obtido a partir da expressão

$$W = \mu+\sigma\left[s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)\right] = 100+10\left[2.326+\frac{1}{6}(2.326^2-1)\right] \approx 130.61.$$

2.4.4 Aplicação: Resseguro ótimo

Uma seguradora pretende fazer um resseguro para uma carteira com 20000 apólices de seguro de vida com duração de um ano, que estão agrupadas da seguinte forma.

Capital seguro b_k	Nº de apólices n_k
1	10000
2	5000
3	5000

A probabilidade de morte no ano é $q_k = 0.01$ para cada segurado e as apólices são independentes. A seguradora quer otimizar a probabilidade de ser capaz de cumprir as suas obrigações financeiras escolhendo a melhor retenção, que é o pagamento máximo por apólice. O excesso da indemnização é pago pela resseguradora. Por exemplo, se a retenção é 1.6 e um indivíduo morre com capital seguro 2, então a seguradora paga 1.6 e a resseguradora 0.4. Depois de cobrados os prémios, a seguradora possui um montante B do qual terá que pagar as indemnizações e o prémio de resseguro. Assume-se que este prémio é 120% do prémio líquido.

Seja o valor da retenção dado por $d = 2$, então, do ponto de vista da seguradora, as apólices são distribuídas das seguinte forma:

Capital seguro b_k	Nº de apólices n_k
1	10000
2	10000

O valor esperado e a variância do montante total de indemnizações são

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= n_1 b_1 q_1 + n_2 b_2 q_2 \\
&= 10000 \times 1 \times 0.01 + 10000 \times 2 \times 0.01 = 300, \\
\mathrm{Var}[S] &= n_1 b_1^2 q_1 (1-q_1) + n_2 b_2^2 q_2 (1-q_2) \\
&= 10000 \times 1 \times 0.01 \times 0.99 + 10000 \times 4 \times 0.01 \times 0.99 \\
&= 495.
\end{aligned}$$

Note que do ponto de vista da resseguradora, as apólices são distribuídas das seguinte forma:

Capital seguro	Nº de apólices
1	5000

Usando o TCL, a probabilidade do valor de S juntamente com o prémio de resseguro $1.2 \times 0.01 \times 5000 \times 1 = 60$ exceder o capital B é

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S+60 > B) &= \mathbb{P}\left(\frac{S-E[S]}{\sigma_S} > \frac{B-360}{\sqrt{495}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{B-360}{\sqrt{495}}\right).
\end{aligned}$$

Agora vai-se calcular a probabilidade de B ser insuficiente para retenções $d \in [2,3]$ e tabém vai-se encontrar o valor da retenção d que minimiza essa probabilidade para $B = 405$.

Agora, uma vez que o valor da retenção $d > 2$, então, do ponto de vista da seguradora, as apólices são distribuídas das seguinte forma:

Capital seguro b_k	Nº de apólices n_k
1	10000
2	5000
d	5000

Considerando as apólices independentes, tem-se que o valor esperado e a variância do montante total de indemnizações são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= n_1 b_1 q_1 + n_2 b_2 q_2 + n_d b_d q_d \\
&= 10000 \times 1 \times 0.01 + 5000 \times (2 \times 0.01 + d \times 0.01) = 200 + 50d, \\
\text{Var}[S] &= n_1 b_1^2 q_1(1-q_1) + n_2 b_2^2 q_2(1-q_2) + n_d b_d^2 q_d(1-q_d) \\
&= 10000 \times 0.0099 + 5000 \times 0.0396 + 5000 \times \left(\frac{d^2}{100} - \frac{d^2}{10000}\right) \\
&= 297 + 49,5d^2.
\end{aligned}$$

O prémio de resseguro é dado por $P = 1.2 \times 5000 \times 0.01(3-d) = 180 - 60d$. Sendo assim, usando o TCL, a probabilidade do valor de S juntamente com o prémio de resseguro $180 - 60d$ exceder o capital B é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S + 180 - 60d > B) &= \mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sigma_S} > \frac{B - 380 + 10d}{\sqrt{297 + 49.5d^2}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(g_B(d)),
\end{aligned}$$

onde

$$g_B(d) = \frac{B - 380 + 10d}{\sqrt{297 + 49.5d^2}}.$$

Para determinar a retenção que minimiza essa probabilidade para $B = 405$, procede-se do seguinte modo. Primeiro note que

$$g_{405}(d) = \frac{25 + 10d}{\sqrt{297 + 49.5d^2}}.$$

Logo $g'_{405}(d) = 0$ implica que $d = 2.4$ e $g''_{405}(2.4) < 0$, donde resulta que $g_{405}(d)$ tem um máximo para $d = 2.4$. Logo esse é o valor da retenção procurado.

2.5 Exercícios

1. Determine o valor esperado e a variância do pagamento de indemnização $X = IB$, em que I representa a variável aleatória indicadora, sabendo que a probabilidade de indemnização é 0.1 e supondo que

(a) $\mathbb{P}(B=5)=1$;

(b) $B \sim \text{Uniforme}(0,10)$.

2. Considere o pagamento de indemnização $X = IB$, em que $I \sim \text{Bernoulli}(q)$ e B representa um pagamento aleatório.

   (a) Mostre que a função geradora de momentos $m_X(t)$ é da forma
   $$m_X(t) = q(m_B(t)-1)+1.$$

   (b) Supondo que podem ocorrer as indemnizações $X = 200$ e $X = 500$ e que as suas probabilidades são 0.2 e 0.05, respetivamente, calcule a probabilidade para o pagamento de indemnização, $\mathbb{P}(I=1)$.

3. Calcule $\mathbb{E}[X]$, $\text{Var}[X]$ e a função geradora de momentos $m_X(t)$ da distribuição mista com diferencial dado por
$$\mathrm{d}F(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{para } x=0 \\ 0.02 & \text{para } x=1000 \\ 0 & \text{para } x<0 \text{ ou } x>1000 \\ 0.00008\mathrm{d}x & \text{para } 0<x<1000 \end{cases}.$$

4. Suponha que $T = qX+(1-q)Y$ e $Z = IX+(1-I)Y$, onde $I \sim \text{Bernoulli(q)}$ é independente das variáveis aleatórias X e Y. Compare $\mathbb{E}[T^k]$ com $\mathbb{E}[Z^k]$ para $k=1,2$.

5. Considere o modelo de risco individual $S = X_1+\cdots+X_n$, em que X_i, $i=1,\dots,n$, são variáveis aleatórias independentes. Calcule a função geradora de momentos de S para o caso em que os riscos individuais são identicamente distribuídos: $X_i = Ib_i$, com $I \sim \text{Bernoulli}(q)$ e $b_i = 1$ para $i=1,\dots,n$.

6. Seja $S = X_1 + X_2 + X_3$ o montante total de indemnizações X_i, $i = 1,2,3$, em que X_i são independentes e identicamente distribuídas com distribuição Geométrica, sendo $\mathbb{P}(X_i = x) = 0.75 \times 0.25^x$, $i = 1,2,3$. Determine $F(s)$ para $s = 0,1,2$, usando o método de convolução.

7. Determine a distribuição de $S = X_1 + X_2$, onde X_k são independentes e $X_k \sim \text{Exponencial}(k)$, $k = 1,2$, usando

   (a) a convolução;

   (b) a função geradora de momentos e identificando a densidade correspondente através do método de frações parciais.

8. Uma carteira contém 2000 apólices de seguro de vida a um ano. Metade dessas apólices são caracterizadas por um pagamento do montante $b_1 = 1$ e uma probabilidade de morte no período de um ano de $q_1 = 1\%$. Para a outra metade tem-se $b_2 = 2$ e $q_2 = 5\%$. Utilize o Teorema Central do Limite para determinar o valor mínimo de carga de segurança, em percentagem, que deve ser adicionado ao prémio líquido para assegurar que a probabilidade do pagamento total não ultrapasse o prémio total em mais do que 5%.

9. Resolva o exercício anterior usando a aproximação NP e o facto de o terceiro cumulante do pagamento total ser igual à soma dos terceiros cumulantes dos riscos.

10. Uma carteira de apólices é constituída por dois tipos de contratos. Para o tipo k, $k = 1,2$, a probabilidade de indemnização é q_k e o número de contratos é n_k. Se houver uma indemnização, então o montante de indemnização é b_k:

k	n_k	q_k	b_k
1	1000	0.01	1
2	2000	0.02	2

Suponha que os contratos são independentes. Sejam S_k o montante total de indemnizações dos contratos do tipo k e $S = S_1 + S_2$.

(a) Calcule a média e a varância de S.

(b) Utilize o Teorema do Limite Central para determinar o capital mínimo que cobre S com probabilidade 95%.

(c) Resolva a alínea anterior usando o método de aproximação NP.

Capítulo 3

Modelos de risco coletivos

Neste capítulo introduzem-se modelos de risco coletivos. Como no capítulo 2 calculamos a distribuição do montante total de indemnizações, mas agora considera-se uma carteira de apólices coletiva que produz um número aleatório N de indemnizações num certo período de tempo. Sendo assim, N é uma variável discreta que toma valores em $\mathbb{N}$ ou num subconjunto de $\mathbb{N}$.

O montante das indemnizações agregadas é representado por

$$S = X_1 + X_2 + \cdots X_N,$$

onde X_i representa o montante da i-ésima indemnização. Obviamente, $S = 0$ se $N = 0$. Assume-se que as indemnizações $\{X_i\}_{i\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X e também que N e $\{X_i\}_{i\geq 1}$ são independentes.

3.1 Distribuições compostas

Suponha que S é uma variável aleatória composta $S = X_1 + \cdots + X_N$ e que $\{X_i\}_{i\geq 1}$, são independentes e identicamente distribuídas a X, e, além disso, independentes de N.

Sejam

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k], \ \ P(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \ \ F(s) = \mathbb{P}(S \leq s).$$

O valor esperado de S pode ser calculado usando a distribuição condicional de S dado N.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_N | N = n]\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n | N = n]\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n]\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu_1 \mathbb{P}(N = n) = \mu_1 \mathbb{E}[N].
\end{aligned}$$

Note-se que o valor esperado do total de indemnizações é igual ao número esperado de indemnizações vezes o montante esperado por indemnização. A igualdade atrás é conhecida por equação de Wald.

Uma forma alternativa de calcular a esperança de S consiste em discretizar a variável aleatória N, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[S\mathbb{1}_{\{\bigcup_{n\geq 0} N=n\}}] = \mathbb{E}\left[S \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[(X_1 + \cdots + X_N)\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[(X_1 + \cdots + X_n)\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n]\mathbb{P}(N = n).
\end{aligned}$$

Acima, na segunda igualdade usou-se o facto de que se A e B são conjuntos disjuntos, então $\mathbb{1}_{A\bigcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ e na quinta igualdade usou-se o facto de N e $\{X_i\}_{i\geq 1}$ serem independentes.

A variância pode ser calculada usando a fórmula de variância condicional:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= \mathbb{E}[\mathrm{Var}[S|N]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[S|N]] \\
&= \mathbb{E}[N\mathrm{Var}[X]] + \mathrm{Var}[N\mu_1] \\
&= \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}[X] + \mu_1^2\mathrm{Var}[N].
\end{aligned}$$

A variância também pode ser calculada usando a discretização de N como acima. Para tal note que, repetindo as mesmas contas feitas para a esperança se tem que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[S^2 \mathbb{1}_{\{\bigcup_{n\geq 0} N=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[(X_1 + \cdots + X_n)^2\right] \mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j^2\right] \mathbb{P}(N=n) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\neq j}^{n} \mathbb{E}[X_i X_j]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu_2 \mathbb{P}(N=n) + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\mu_1^2 \mathbb{P}(N=n), \\
&= \mu_2\mathbb{E}[N] + \mu_1^2\mathbb{E}[N^2] - \mu_1^2\mathbb{E}[N],
\end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= \mathbb{E}[S^2] - (\mathbb{E}[S])^2 \\
&= \mu_2\mathbb{E}[N] + \mu_1^2\mathbb{E}[N^2] - \mu_1^2\mathbb{E}[N] - \mu_1^2(\mathbb{E}[N])^2, \\
&= (\mu_2 - \mu_1^2)\mathbb{E}[N] + \mu_1^2(\mathbb{E}[N^2] - (\mathbb{E}[N])^2), \\
&= \mathrm{Var}[X]\mathbb{E}[N] + \mu_1^2\mathrm{Var}[N].
\end{aligned}$$

Para a função geradora de momentos, obtém-se

$$\begin{aligned}
m_S(t) &= \mathbb{E}\left[e^{tS}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{tS}|N]\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{t(X_1+\cdots+X_N)}|N=n\right]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{m_X(t)\}^n \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\log(m_X(t))}\mathbb{P}(N=n) \\
&= m_N(\log(m_X(t))).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.1. *(Exemplo de uma função de distribuição composta)*

Sejam $N \sim$Geométrica(p), $0<p<1$ e $X \sim$Exponencial(1). Determine a função geradora de momentos de S e sua função de distribuição.

Escrevendo $q = 1-p$, então para $qe^t < 1$, isto é $t < -\log q$, tem-se

$$m_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt}pq^n = p\sum_{n=0}^{\infty}(qe^t)^n = \frac{p}{1-qe^t}.$$

Repare que a série acima é uma série geométrica de razão qe^t, que é convergente se $qe^t < 1$. Como $X \sim$Exponencial(1), então $m_X(t) = (1-t)^{-1}$. Logo,

$$m_S(t) = m_N(\log m_X(t)) = \frac{p}{1-qm_X(t)}.$$

Para se encontrar a função de distribuição de S, uma vez que não reconhecemos a função geradora de momentos, precisamos de decompor a expressão atrás numa soma convexa de funções geradoras de momentos conhecidas. Para tal, note que

$$m_S(t) = p + q\frac{p}{p-t} = pm_U(t) + qm_V(t),$$

onde U é a variável aleatória constante igual a zero, uma vez que $m_U(t) = \mathbb{E}[e^{tU}] = 1$ e da unicidade da função geradora de momentos resulta que $U=0$; e V tem distribuição exponencial de parâmetro p.

Logo S é mistura de U e V. Pela relação única entre a função de distribuição e a função geradora de momentos temos que

$$F(x) = pF_U(x) + qF_V(x). \tag{3.1.1}$$

Como $F_U(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ e $F_V(x) = \left(1 - e^{-px}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, resulta que $F(x) = (p + q(1 - e^{-px}))\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = (1 - qe^{-px})\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

Agora, note que sendo $F(x) = pF_U(x) + qF_V(x)$, se tem que

$$\begin{aligned}
m_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}] &= \int_0^\infty e^{tx}\,\mathrm{d}F(x) \\
&= \int_0^\infty e^{tx}\,\mathrm{d}(pF_U(x) + qF_V(x)) \\
&= p\int_0^\infty e^{tx}\,\mathrm{d}F_U(x) + q\int_0^\infty e^{tx}\,\mathrm{d}F_V(x) \\
&= pm_U(t) + qm_V(t).
\end{aligned}$$

3.2 Fórmula de convolução para uma função de distribuição composta

A função de distribuição de S pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
F(x) = \mathbb{P}(S \le x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_N \le x | N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \le x)\mathbb{P}(N = n)
\end{aligned}$$

assim,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x)\mathbb{P}(N = n), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x)\mathbb{P}(N = n). \tag{3.2.1}$$

Estas expressões definem as fórmulas de convolução para uma função de distribuição composta.

Exemplo 3.2.1. *Aplicação da fórmula de convolução*

Sejam $\mathbb{P}(N = j - 1) = j/10$ para $j = 1, 2, 3, 4$ e $p(1) = 0.4$ e $p(2) = 0.6$. Usando (3.2.1), $F(x)$ pode ser calculada da seguinte forma.

x	$p^{*0}(x)$	$p^{*1}(x)$	$p^{*2}(x)$	$p^{*3}(x)$		$f(x)$		$F(x)$
0	1					0.1000		0.1000
1		0.4				0.0800		0.1800
2		0.6	0.16			0.1680		0.3480
3			0.48	0.064		0.1696		0.5176
4			0.36	0.288		$\vdots$		$\vdots$
5				0.432		$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	$\updownarrow\times$	$+\updownarrow\times$	$+\updownarrow\times$	$+\updownarrow\times$	$=$	$\uparrow$	$\Rightarrow$	$\uparrow$
$\mathbb{P}(N=n)$	0.1	0.2	0.3	0.4				

As probabilidades $\mathbb{P}(N=n)$ *na última linha são multiplicadas pelos números das linhas anteriores. A soma destes resultados é colocada na linha correspondente da coluna* $f(x)$. *Por exemplo:* $0.1680 = 0.2\times 0.6 + 0.3\times 0.16$.

Exemplo 3.2.2. *(Distribuições compostas: Montantes de indemnizações exponenciais)*

A convolução de potência n *é fácil de calcular se* X *segue uma distribuição Normal ou uma distribuição Gama: a soma de* n *variáveis aleatórias independentes* $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ *tem distribuição* $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ *e a soma de* n *variáveis aleatórias de distribuição Gama*(α,β) *tem distribuição Gama*$(n\alpha,\beta)$. *Suponha que os montantes das indemnizações têm distribuição Exponencial*(1), *que é igual à distribuição Gama*$(1,1)$. *Então* $X_1+X_2+\ldots+X_n$ *tem distribuição Gama*$(n,1)$. *Logo*

$$\mathbb{P}(X_1+X_2+\ldots+X_n > x) = 1-P^{*n}(x) = \int_x^\infty y^{n-1}\frac{e^{-y}}{(n-1)!}\mathrm{d}y.$$

Se $G(x,\alpha,\beta)$ *denota a função de distribuição da Gama*(α,β), *então tem-se que* $1-P^{*n}(x) = 1-G(x,n,1)$.

Por outro lado, em processos de Poisson de tempo de espera, a probabilidade de esperar pelo menos o tempo x *até ao* n*-ésimo acontecimento (que é* *igual à probabilidade de terem ocorrido no máximo $n-1$ acontecimentos até ao tempo x) é uma probabilidade de Poisson(x). Para $i \geq 1$, seja T_i o tempo que decorre entre o $(i-1)$-ésimo e o i-ésimo acidentes, e note que $\{T_i\}_{i\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição Exponencial(1). Seja N a variável aleatória que conta o número de acidentes ocorridos até ao tempo x, então $N \sim$Poisson(x). Ora, a probabilidade de esperar pelo menos o tempo x até ao n-ésimo acontecimento corresponde a*

$$\mathbb{P}(T_1 + \ldots + T_n \geq x) = 1 - P^{*n}(x),$$

e a probabilidade de terem ocorrido no máximo $n-1$ acontecimentos até ao tempo x corresponde a

$$\mathbb{P}(N \leq n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-x} \frac{x^i}{i!}$$

Logo

$$1 - P^{*n}(x) = \int_x^{\infty} y^{n-1} \frac{e^{-y}}{(n-1)!} \mathrm{d}y = e^{-x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!}.$$

A segunda igualdade acima pode ser demonstrada usando a integração por partes ou comparando as expressões das derivadas. Antes de prosseguir apresenta-se abaixo a demonstração dessa igualdade, primeiro usando a integração por partes e deixa-se a demonstração comparando as expressões das derivadas ao cargo do leitor.

A primeira demonstração é feita usando indução em n. Então para $n = 1$, tem-se que

$$\int_x^{\infty} y^{n-1} \frac{e^{-y}}{(n-1)!} \mathrm{d}y = \int_x^{\infty} e^{-y} \, \mathrm{d}y = e^{-x}$$

e

$$e^{-x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} = e^{-x},$$

donde resulta a igualdade. Agora suponha que a igualdade vale para n e prove-se para $n+1$, isto é:

$$\int_x^{\infty} y^n \frac{e^{-y}}{(n)!} \mathrm{d}y = e^{-x} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

Ora

$$\int_x^\infty y^n \frac{e^{-y}}{(n)!} \mathrm{d}y = \int_x^\infty \frac{y}{n} y^{n-1} \frac{e^{-y}}{(n-1)!} \mathrm{d}y.$$

Fazendo integração por partes e notando que a primitiva de $y^{n-1}\frac{e^{-y}}{(n-1)!}$ *corresponde a* $-F(x)$*, onde*

$$F(x) = \int_x^{+\infty} y^{n-1} \frac{e^{-y}}{(n-1)!} \,\mathrm{d}y,$$

tem-se que

$$\int_x^\infty \frac{y}{n} y^{n-1} \frac{e^{-y}}{(n-1)!} \mathrm{d}y = -\frac{y}{n} F(y)\Big|_x^\infty + \frac{1}{n} \int_x^\infty F(y)\,\mathrm{d}y.$$

Note que, pela hipótese de indução sabe-se que

$$F(x) = e^{-x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!}.$$

Agora usa-se a igualdade anterior e obtém-se

$$\begin{aligned} & -\frac{y}{n} F(y)\Big|_x^\infty + \frac{1}{n} \int_x^\infty F(y)\,\mathrm{d}y \\ = & \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-x} \frac{x^i}{i!} + \frac{1}{n} \int_x^\infty \sum_{i=0}^{n-1} e^{-x} \frac{x^i}{i!} \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Note que

$$\int_x^\infty \sum_{i=0}^{n-1} e^{-x} \frac{x^i}{i!} \,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{n-1} \int_x^\infty e^{-x} \frac{x^i}{i!} \,\mathrm{d}y$$

e novamente pela hipótese de indução, a expressão anterior é igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} e^{-x} \frac{x^j}{j!}.$$

Agora, troca-se a ordem na soma acima e fica igual a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} e^{-x} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) e^{-x} \frac{x^j}{j!}.$$

Sendo assim, tem-se que (3.2.2) *fica igual a*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-x} \frac{x^{i+1}}{i!} + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) e^{-x} \frac{x^j}{j!} \\ = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-x} \frac{x^i}{(i-1)!} + \sum_{j=0}^{n-1} e^{-x} \frac{x^j}{j!} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j e^{-x} \frac{x^j}{j!}. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Agora uma conta simples mostra que a expressão atrás fica igual a $e^{-x}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$, *como se pretendia demonstrar.*

Finalmente, para $x > 0$ *tem-se*

$$\begin{aligned} 1-F(x) &= 1-\sum_{n=0}^{\infty}P^{*n}(x)\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-P^{*n}(x))\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(N=n)e^{-x}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}. \end{aligned}$$

Acima usou-se o facto de que $1=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(N=n)$.

3.3 Distribuições para o número de indemnizações

Exemplo 3.3.1. *(Distribuição de Poisson - incerteza sobre o parâmetro)*

Suponha que um condutor de um carro tem um número de acidentes distribuídos de acordo com uma distribuição Poisson(λ). *O parâmetro* λ *é desconhecido e é diferente para cada condutor. Assumimos que* λ *corresponde à realização de uma variável aleatória* Λ. *Então, a distribuição condicional do número de acidentes* N *num ano, dado* $\Lambda=\lambda$, *tem distribuição Poisson*(λ). *Pretende-se saber qual é a distribuição marginal de* N.

Seja $U(\lambda)=\mathbb{P}(\Lambda\leq\lambda)$ *a função de distribuição de* Λ. *As probabilidades marginais do acontecimento* $N=n$ *podem ser escritas na forma*

$$\mathbb{P}(N=n)=\int_0^{\infty}\mathbb{P}(N=n|\Lambda=\lambda)\mathrm{d}U(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{d}U(\lambda).$$

Para a média e a variância (não-condicionais) de N *tem-se*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N|\Lambda]]=\mathbb{E}[\Lambda], \\ Var[N] &= \mathbb{E}[Var[N|\Lambda]]+Var[\mathbb{E}[N|\Lambda]] \\ &= \mathbb{E}[\Lambda]+Var[\Lambda]\geq\mathbb{E}[N]. \end{aligned}$$

Para tal note que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \lambda \mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \mathbb{E}[\Lambda].
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[N^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) + \int_0^{\infty} \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \mathbb{E}[\Lambda^2] + \mathbb{E}[\Lambda].
\end{aligned}
$$

Daqui resulta que

$$
Var[N] = \mathbb{E}[N^2] - (\mathbb{E}[N])^2 = \mathbb{E}[\Lambda^2] + \mathbb{E}[\Lambda] - (\mathbb{E}[\Lambda])^2 = Var[\Lambda] + \mathbb{E}[\Lambda].
$$

Por outro lado note que

$$\begin{aligned}
m_N(t) = \mathbb{E}[e^{tN}] &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}\int_0^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(e^t\lambda)^n}{n!}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(e^t-1)}\mathrm{d}U(\lambda) \\
&= m_\Lambda(e^t-1).
\end{aligned}$$

Agora, suponha que $\Lambda \sim$*Gama*(α,β)*. Escrevendo* $p=\frac{\beta}{\beta+1}$*, obtém-se*

$$\begin{aligned}
m_N(t) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tN}|\Lambda]] = \mathbb{E}[e^{\Lambda(e^t-1)}] = m_\Lambda(e^t-1) \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-(e^t-1)}\right)^{\alpha} = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^{\alpha},
\end{aligned}$$

que representa a função geradora de momentos de uma distribuição Binomial Negativa $(\alpha,\beta/(\beta+1))$.

Assim, da unicidade da função geradora de momentos, conclui-se que N *tem distribuição Binomial Negativa* $(\alpha,\beta/(\beta+1))$.

Exemplo 3.3.2. *(Distribuição Binomal Negativa Composta)*

Suponha que num ano houve N *acidentes de trânsito com vítimas mortais. Para* $i\geq 1$*, seja* L_i *o número de vítimas mortais no i-ésimo acidente, sendo* $S=L_1+\cdots+L_N$ *o número total de vítimas mortais. Suponha que* $N\sim$*Poisson*(λ) *e que, para* $i\geq 1$, $L_i \sim$*Logarítmica*(c), $0<c<1$.

Assim

$$\mathbb{P}(L_i=k)=\frac{c^k}{kh(c)},\ k=1,2,....$$

Nota que $h(c)$ *é uma constante de normalização, ou seja, é tal que a soma das probabilidades acima seja igual a 1. Então:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(L_i=k)=1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k}=h(c).$$

Da expansão em série de Taylor de $\log(1+x)$, *ou seja, de*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

conclui-se que $h(c) = -\log(1-c)$, *daí a designação "Logarítmica" para esta distribuição.*

Pretende-se encontrar a distribuição de S. *A função geradora de momentos de* L_i *é dada por*

$$m_L(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{tk}c^k}{kh(c)} = \frac{h(ce^t)}{h(c)}.$$

Então, a função geradora de momentos de S *é dada por*

$$\begin{aligned} m_S(t) &= m_N(\log(m_L(t))) = e^{\lambda(m_L(t)-1)} \\ &= (e^{h(ce^t)-h(c)})^{\lambda/h(c)} = \left(\frac{1-c}{1-ce^t}\right)^{\lambda/h(c)}, \end{aligned}$$

que pode ser reconhecida como a função geradora de momentos de uma distribuição Binomial Negativa de parâmetros $\lambda/h(c) = -\lambda/\log(1-c)$ *e* $1-c$.

3.4 Propriedades das distribuições de Poisson compostas

Teorema 3.4.1 (A soma de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson composta tem distribuição de Poisson composta)**.** *Se* $S_1, \ldots, S_m$ *são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson composta de parâmetro* λ_i *e cujas indemnizações individuais têm função de distribuição* P_i, $i = 1, \ldots, m$, *então* $S = S_1 + \cdots + S_m$ *tem distribuição de Poisson composta com parâmetros:*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \text{ e } \ P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x).$$

Demonstração

Seja m_i a função geradora de momentos de P_i :

$$m_i(t) = \int e^{tx}\, \mathrm{d}P_i(x).$$

Então, S tem a seguinte função geradora de momentos:

$$\begin{aligned} m_S(t) &= \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}[e^{t(S_1+\ldots+S_m)}] \\ &= \prod_{i=1}^{m} \mathbb{E}[e^{tS_i}] = \prod_{i=1}^{m} e^{\lambda_i[m_i(t)-1]} \\ &= e^{\lambda(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} m_i(t)-1)}. \end{aligned}$$

Note que acima, na terceira igualdade usou-se a independência de $\{S_i\}_{i=1,\ldots,m}$ e na quarta igualdade usou-se o facto de S_i ter distribuição de Poisson composta de parâmetros λ_i e $P_i(x)$.

Por outro, lado note que a função geradora de momentos que corresponde à distribuição $P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x)$, é dada por

$$\begin{aligned} m(t) &= \int e^{tx} \, \mathrm{d} \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} \int e^{tx} \, \mathrm{d} P_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} m_i(t), \end{aligned}$$

e pela unicidade da função geradora de momentos, a prova termina. □

Nota 3.4.2. *Suponha que S_i tem indemnizações fixas dadas por x_i, $S_i = x_i N_i$ com $N_i \sim$Poisson(λ_i). Se x_i forem todas diferentes, então, pelo Teorema anterior a variável aleatória*

$$S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_m N_m,$$

tem distribuição de Poisson composta com parâmetro

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \ \ e \ \ p(x_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Para tal basta observar que $P_i(x_j) = 1$ se $i = j$, ou 0 caso $i \neq j$. Logo $p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda} P_j(x_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$.

Teorema 3.4.3 (As frequências dos montantes das indemnizações são independentes e têm distribuição de Poisson)**.** *Suponha que S tem distribuição de Poisson composta de parâmetro λ e que as indemnizações têm distribuição discreta dada por*

$$\pi_i = p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i),\ i = 1, ..., m.$$

Supondo que $S = x_1 N_1 + \cdots + x_m N_m$, onde N_i representa a frequência do montante da indemnização x_i, isto é, o número de termos em S com valor x_i, então, $N_1, ..., N_m$ são variáveis aleatórias independentes e têm distribuição Poisson$(\lambda \pi_i)$, $i = 1, ..., m$.

Demonstração

Sejam $N = N_1 + \cdots + N_m$ e $n = n_1 + \cdots + n_m$. Condicionado a $N = n$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 = n_1, ..., N_m = n_m) &= \mathbb{P}(N_1 = n_1, ..., N_m = n_m | N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \cdots \pi_m^{n_m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \cdots \pi_m^{n_m}}{n_1! n_2! \cdots n_m!} e^{-\lambda \sum_{i=1}^m \pi_i} \lambda^{n_1 + \cdots + n_m} \\
&= \prod_{i=1}^m e^{-\lambda \pi_i} \frac{(\lambda \pi_i)^{n_i}}{n_i!}.
\end{aligned}$$

Para provar que $\mathbb{P}(N_1 = n_1, ..., N_m = n_m | N = n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \cdots \pi_m^{n_m}$ considere primeiro o caso em que $m = 2$: $\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 | N = n) = \frac{n!}{n_1! n_2!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2}$, onde N_1 e N_2 representam as frequências de x_1 e de x_2 e $n = n_1 + n_2$. Sabemos que no início temos n posições disponíveis para as n_1 ocorrências de x_1, então a quantidade de posições para x_1 é $\binom{n}{n_1}$. Depois de fixar as posições de x_1 sobram $n - n_1 = n_2$ posições para x_2 que não podem ser escolhidas. As probabilidades de x_1 ocorrer n_1 vezes e de x_2 ocorrer n_2 vezes são, respetivamente, $\pi_1^{n_1}$ e $\pi_2^{n_2}$. Então, conclui-se que

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 | N = n) = \binom{n}{n_1} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} = \frac{n!}{n_1! n_2!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2}.$$

Este resultado pode ser facilmente generalizado para casos em que $m > 2$, notando que

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}{n_m}.$$

A distribuição de $(N_1 = n_1, ..., N_m = n_m)$ condicionada por $N = n$ também é conhecida por distribuição Multinomial de parâmetros n e $\pi_1, ..., \pi_m$, em que $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1$: Multinomial$(n, \pi_1, ..., \pi_m)$. Esta distribuição corresponde a uma generalização da distribuição Binomial.

Agora, note que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 = n_1) &= \mathbb{P}\left(N_1 = n_1, \bigcup_{n_2 \in \mathbb{N}} \{N_2 = n_2\} \ldots, \bigcup_{n_m \in \mathbb{N}} \{N_m = n_m\}\right) \\
&= \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{n_m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 ..., N_m = n_m) \\
&= \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{n_m \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^m e^{-\lambda\pi_i} \frac{(\lambda\pi_i)^{n_i}}{n_i!} = e^{-\lambda\pi_1} \frac{(\lambda\pi_1)^{n_1}}{n_1!},
\end{aligned}$$

logo, N_1 tem distribuição Poisson$(\lambda\pi_1)$. Analogamente se mostra que, N_k tem distribuição Poisson$(\lambda\pi_k)$, para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$. Como

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, ..., N_m = n_m) = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(N_k = n_k),$$

as variáveis aleatórias $\{N_i\}_{1 \leq i \leq m}$ são independentes.

Exemplo 3.4.4. *(Algoritmo do vetor esparso)*

Se as indemnizações X são variáveis aleatórias inteiras não negativas, podemos calcular a distribuição de Poisson composta usando o seguinte método.

Sejam $\lambda = 4$ e $\mathbb{P}(X = 1, 2, 3) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Então podemos escrever S da forma $S = 1N_1 + 2N_2 + 3N_3$. A distribuição de S pode ser calculada usando a convolução. Determinamos $f(x) = \mathbb{P}(S = x)$ da seguinte forma:

x	$\mathbb{P}(N_1 = x)$	$*$	$\mathbb{P}(2N_2 = x)$	$= \mathbb{P}(N_1 + 2N_2 = x)$	$*$	$\mathbb{P}(3N_3 = x)$	$= \mathbb{P}(S = x)$
	$e^{-1}\times$		$e^{-2}\times$	$e^{-3}\times$		$e^{-1}\times$	$e^{-4}\times$
0	1		1	1		1	1
1	1		–	1		–	1
2	1/2		2	5/2		–	5/2
3	1/6		–	13/6		1	19/6
4	1/24		2	:		–	:
:	:		:	:		:	:
	$\uparrow$		$\uparrow$			$\uparrow$	
	$1/x!$		$2^{x/2}/(x/2)!$			$1/(x/3)!$	

Nas colunas com as probabilidades de jN_j, só as linhas $0, j, 2j, \ldots$ ficam preenchidas. Estas são as probabilidades de Poisson($\lambda\pi_j$).

3.5 Fórmula recursiva de Panjer

Este método, desenvolvido por Panjer em 1981, permite calcular as probabilidades $f(x)$ recursivamente.

Teorema 3.5.1 (Fórmula recursiva de Panjer)**.** *Considere uma distribuição composta com indemnizações inteiras não negativas com função massa de probabilidade $p(x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, para a qual a probabilidade q_n de haver n indemnizações satisfaz a seguinte relação recursiva*

$$q_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

para a e b reais.

Então, tem-se para $\mathbb{P}(S = s)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \begin{cases} \mathbb{P}(N = 0), & se \quad p(0) = 0; \\ m_N(\log p(0)), & se \quad p(0) > 0; \end{cases} \\ f(s) &= \frac{1}{1 - ap(0)} \sum_{h=1}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) p(h) f(s-h), \; s = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Demonstração

Vai-se começar por $s = 0$. Ora,

$$\mathbb{P}(S = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(0)\mathbb{P}(N = n).$$

É fácil ver que, como $p(\cdot)$ só toma valores nos inteiros positivos, $p^{*n}(0) = p^n(0)$. Para tal note que $p^{*1}(0) = p(0)$, e supondo que $p^{*n}(0) = p^n(0)$, então tem-se que

$$p^{*(n+1)}(0) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} p^{*n}(x)p(-x) = \sum_{x\le 0} p^{*n}(x)p(-x).$$

Agora note que $p^*(x) = 0$, se $x < 0$, donde resulta, por indução, que

$$p^{*n}(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} p^{*(n-1)}(x-y)p(y) = \sum_{y\ge 0} p^{*n}(x-y)p(y) = 0,$$

porque $x-y<0$. Então daqui se conclui que $p^{*(n+1)}(0) = 0$. Logo,

$$\mathbb{P}(S=0) = \mathbb{P}(N=0) + \sum_{n=1}^{\infty} p^n(0)\mathbb{P}(N=n).$$

Se $p(0) = 0$, então $\mathbb{P}(S=0) = \mathbb{P}(N=0)$, caso contrário,

$$\mathbb{P}(S=0) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(0)\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\log(p(0))}\mathbb{P}(N=n),$$

ou seja, $\mathbb{P}(S=0) = m_N(\log p(0))$.

Agora, tome-se $s \neq 0$. Seja $T_k = X_1 + \ldots + X_k$. Por simetria, é fácil ver que

$$\mathbb{E}\Big[a + \frac{bX_1}{s}\Big|T_k = s\Big] = a + \frac{b}{k}.$$

Para tal seja $\theta = \mathbb{E}\Big[a + \frac{bX_1}{s}\Big|T_k = s\Big]$. Note que como as variáveis são identicamente distribuídas, tem-se que $\theta = \mathbb{E}\Big[a + \frac{bX_i}{s}\Big|T_k = s\Big]$, para todo $i = 1,\ldots,k$. Então

$$\mathbb{E}\Big[ak + \frac{bX_1 + \ldots + bX_k}{s}\Big|T_k = s\Big] = ak + b,$$

mas também se tem que

$$\mathbb{E}\Big[ak + \frac{bX_1 + \ldots + bX_k}{s}\Big|T_k = s\Big] = \theta k.$$

Daqui resulta que $\theta = a + b/k$, como pretendido. Por outro lado,

$$\mathbb{E}\Big[a + \frac{bX_1}{s}\Big|T_k = s\Big] = \sum_{h=0}^{s}\Big(a + \frac{bh}{s}\Big)\mathbb{P}\Big(X_1 = h\Big|T_k = s\Big).$$

Ora,

$$\mathbb{P}\Big(X_1 = h \Big| T_k = s\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big(X_1 = h, T_k = s\Big)}{\mathbb{P}\Big(T_k = s\Big)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}\Big(X_1 = h)\mathbb{P}\Big(T_k - X_1 = s - h\Big)}{\mathbb{P}\Big(T_k = s\Big)}.$$

Das expressões atrás resulta que

$$\mathbb{P}\Big(T_k = s\Big)\Big(a + \frac{b}{k}\Big) = \sum_{h=0}^{s}\Big(a + \frac{bh}{s}\Big)\mathbb{P}\Big(X_1 = h)\mathbb{P}\Big(T_k - X_1 = s - h\Big).$$

Finalmente,

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{*k}(s)\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(T_k = s)q_k.$$

Pela hipótese sob q_k a expressão atrás fica igual a

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a + \frac{b}{k}\Big)q_{k-1}\mathbb{P}(T_k = s).$$

Usando a expressão que se obteve para $\mathbb{P}(T_k = s)$, obtém-se

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1}\sum_{h=0}^{s}\Big(a + \frac{bh}{s}\Big)\mathbb{P}(X_1 = h)\mathbb{P}\Big(T_k - X_1 = s - h\Big)$$
$$= \sum_{h=0}^{s}\Big(a + \frac{bh}{s}\Big)p(h)f(s-h),$$

o que termina a prova. □

Exemplo 3.5.2. *(Distribuições adequadas para o método recursivo de Panjer)*

1. *Poisson*(λ).

   Note que neste caso, $q_n = \mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ *e*

$$q_n = \frac{\lambda}{n}q_{n-1}.$$

Logo se N ∼Poisson(λ), então pode-se aplicar a fórmula de Panjer tomando $a=0$ e $b=\lambda\geq 0$.

Neste caso obtém-se a seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} f(0) =& e^{-\lambda(1-p(0))}, \quad \textit{se} \quad p(0)>0, \\ f(0) =& e^{-\lambda}, \quad \textit{se} \quad p(0)=0, \\ f(s) =& \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s}\lambda h p(h) f(s-h). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

2. *Binomial Negativa(r,p).*

   Note que neste caso, $q_n=\mathbb{P}(N=n)=\frac{(r+n-1)!}{n!(r-1)!}p^r(1-p)^n$ *e*

$$q_n=(1-p)(1+(r-1)/n)q_{n-1}.$$

   Logo se N ∼Binomial Negativa(r,p), então pode-se aplicar a fórmula de Panjer tomando $a=(1-p)$ *e* $b=(1-p)(r-1)$, *com* $0<a<1$ *e* $a+b>0$;

   Neste caso obtém-se a seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} f(0) &= \left(\frac{p}{1-(1-p)p(0)}\right)^r, \quad \textit{se} \quad p(0)>0, \\ f(0) &= p^r, \quad \textit{se} \quad p(0)=0, \\ f(s) &= \frac{1-p}{1-(1-p)p(0)}\sum_{h=1}^{s}\left(\frac{s+(r-1)h}{s}\right)p(h)f(s-h). \end{aligned}$$

3. *Binomial(k,p).*

   Note que neste caso, $q_n=\mathbb{P}(N=n)=\frac{k!}{n!(k-n)!}p^n(1-p)^{k-n}$ *e*

$$q_n=\frac{p}{1-p}\frac{k+1-n}{n}q_{n-1}.$$

   Logo se N ∼Binomial Negativa(r,p), então pode-se aplicar a fórmula de Panjer tomando $p=\frac{a}{a-1}$ *e* $k=-\frac{b+a}{a}$, *em que* $a<0$, $b=-a(k+1)$.

Neste caso obtém-se a seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} f(0) &= (1+p(p(0)-1))^k, \quad se \quad p(0)>0,\\ f(0) &= (1-p)^k, \quad se \quad p(0)=0,\\ f(s) &= \frac{p}{p(1-p(0))-1}\sum_{h=1}^{s}\left[1-(k+1)\frac{h}{s}\right]p(h)f(s-h). \end{aligned}$$

Agora fazem-se algumas observações.

Nos outros casos de a,b não se obtém uma probabilidade (note que $q_0>0$):

1. *se $a+b=0$, então $q_1=(a+b)q_0=0$ (o que implica $q_n=0$ para todo $n\geq 2$), logo $q_0=1$ ou seja, obtém-se Poisson(0),*

2. *se $a+b<0$, então $q_1=(a+b)q_0<0$, o que é impossível,*

3. *se $a<0$ e $b\neq a(n+1)$ para todo $n\geq 1$, então, supondo $b=a(n+1)+r$, resulta que para $|r|<a$, se tem $q_n=(a+a(n+1)/n+r/n)q_{n-1}<0$, logo $q_n<0$ o que é impossível,*

4. *se $a\geq 1$, então $q_n\geq \frac{q_1}{n}$, pois:*

$$nq_n=n(a+b/n)q_{n-1}=(a(n-1)+a+b)q_{n-1}\geq(n-1)q_{n-1},$$

logo

$$q_n\geq\frac{n-1}{n}q_{n-1}\geq\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}q_{n-2}\geq\frac{q_1}{n},$$

donde resulta que $\sum_{n\geq 1}q_n\geq\sum_{n\geq 1}\frac{q_1}{n}=\infty$, o que também é impossível.

Exemplo 3.5.3. *(Aplicação da fórmula de Panjer)*

Considere uma distribuição de Poisson composta com $\lambda=4$ e $\mathbb{P}(X=1,2,3)=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$. Pelos exemplos acima, sabe-se que $N\sim$Poisson(λ) satisfaz a relação recursiva da fórmula de Panjer. Por outro lado, $p(x)=\mathbb{P}(X=x)$ é uma probabilidade (pois $p(1)+p(2)+p(3)=1$) que só toma valores em $x=1,2,3$. Então, aplicando a fórmula recursiva de Panjer, tem-se

$$f(s)=\frac{1}{s}[f(s-1)+4f(s-2)+3f(s-3)],\ \ s=1,2,\ldots.$$

O valor inicial, como $p(0) = 0$, é $f(0) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-4} \approx 0.0183$ e os restantes valores são dados por

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) = e^{-4}, \\ f(2) &= \frac{1}{2}[f(1) + 4f(0)] = \frac{5}{2}e^{-4}, \\ f(3) &= \frac{1}{3}[f(2) + 4f(1) + 3f(0)] = \frac{19}{6}e^{-4}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Exemplo 3.5.4.

As indemnizações agregadas de uma risco 1, respresentadas por S_1, seguem uma distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda = 2$ e as indemnizações agregadas de uma risco 2, respresentadas por S_2, seguem uma distribuição Binomial Negativa composta de parâmteros $r = 2$ e $p = 0.5$. Para cada risco, as indemnizações individuais têm função de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0.4, \ \mathbb{P}(X = 2) = 0.35, \ \mathbb{P}(X = 3) = 0.25.$$

Seja $S = S_1 + S_2$. Calcule $\mathbb{P}(S = s)$, para $s = 0, 1, 2, 3$, assumindo que S_1 e S_2 são independentes.

Como $S = S_1 + S_2$, então a função de probabilidade de S pode ser calculada a partir da fórmula de convolução

$$f_S(s) = f_{S_1} * f_{S_2}(s) = \sum_{x=0}^{s} f_{S_2}(s - x) f_{S_1}(x),$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$, e as funções de probabilidade de S_1 e S_2 podem ser calculadas usando as fórmulas recursivas de Panjer para uma distribuição de Poisson e para uma distribuição Binomial negativa, obtendo-se os resultados listados na seguinte tabela.

s	$P(S_1 = s)$	$*$	$P(S_2 = s)$	$=$	$P(S = s)$
0	0.1353		0.2500		0.0338
1	0.1083		0.1000		0.0406
2	0.1380		0.1175		0.0612
3	0.1550		0.1230		0.0819

Exemplo 3.5.5. *(Método recursivo de Panjer e prémios stop-loss)*

Para um valor inteiro S, podemos escrever o prémio stop-loss com retenção d da forma:

$$\pi_S(d) = \mathbb{E}[(S-d)_+] = \sum_{x=d}^{\infty}(x-d)f(x) = \sum_{x=d}^{\infty}[1-F(x)].$$

O prémio stop-loss pode ser calculado recursivamente porque da equação anterior obtém-se para d inteiro:

$$\pi_S(d) := \mathbb{E}[(S-d)_+] = \pi_S(d-1) - [1-F(d-1)].$$

Como exemplo, considere que S tem distribuição de Poisson composta com $\lambda = 1$ e $p(1) = p(2) = \frac{1}{2}$. Novamente se nota que se pode aplicar a fórmula de Panjer, pois $N \sim Poisson(1)$ e $p(x)$ é uma probabilidade que toma valores em $x = 1, 2$.

Então, neste caso, da fórmula recursiva de Panjer resulta que

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}f(x-1) + f(x-2)\right], \; x = 1, 2, ...,$$

com valores iniciais

$$f(0) = e^{-1} \approx 0.368, \; F(0) = f(0), \; \pi_S(0) = \mathbb{E}[S] = \lambda\mu_1 = \frac{3}{2}.$$

Efetuando os cálculos da tabela seguinte obtém-se os valores para $\pi_S(d)$:

d	$f(d)$	$F(d) = F(d-1) + f(d)$	$\pi_S(d) = \pi_S(d-1) - 1 + F(d-1)$
0	0.368	0.368	1.500
1	0.184	0.552	0.868
2	0.230	0.782	0.420
3	0.100	0.882	0.201
4	0.070	0.952	0.083
5	0.027	0.979	0.034

Exemplo 3.5.6.

Sabendo que o prémio stop-loss é $\pi(d) = \mathbb{E}[(S-d)_+] = 0.3$ e que S tem distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda = 1$ e $p(1) = p(2) = \dfrac{1}{2}$, determine o valor da retenção d usando o método recursivo de Panjer.

Como S é inteiro, tem-se que

$$\pi_S(d) := \mathbb{E}[(S-d)_+] = \pi_S(d-1) - [1 - F(d-1)].$$

A fórmula recursiva de Panjer para este caso é dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}f(x-1) + f(x-2)\right], \ x = 1, 2, ...,$$

com valores iniciais

$$f(0) = e^{-1} \approx 0.368, \ F(0) = f(0), \ \pi_S(0) = \mathbb{E}[S] = \lambda\mu_1 = \frac{3}{2}.$$

Aplicando as duas fórmulas recursivas, obtém-se os resultados da seguinte tablela para $x = d = 1, 2, 3$.

d	$f(d)$	$F(d) = F(d-1) + f(d)$	$\pi_S(d) = \pi_S(d-1) - 1 + F(d-1)$
0	e^{-1}	e^{-1}	1.5000
1	$\frac{1}{2}e^{-1}$	$\frac{3}{2}e^{-1}$	0.8678
2	$\frac{5}{8}e^{-1}$	$\frac{17}{8}e^{-1}$	0.4196
3	$\frac{13}{218}e^{-1}$	$\frac{115}{48}e^{-1}$	0.20134

Como $\pi_S(3) \approx 0.20134 < \pi_S(d) = 0.3 < \pi_S(2) \approx 0.4196$, então o valor de d tem que estar no intervalo $(2, 3)$. Recorde que $\pi_S(d)$ decresce linearmente com declive igual a -1, então, fazendo uma interpolação linear obtém-se $d \approx 2.5479$.

Exemplo 3.5.7. *(Prova da fórmula recursiva de Panjer usando a função geradora de probabilidades para a distribuição de Poisson composta)*

Para uma distribuição de Poisson composta, a fórmula recursiva de Panjer pode ser obtida através da função geradora de probabilidades.

Escrevendo

$$\frac{dg_S}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{s=0}^{\infty} t^s \mathbb{P}(S = s) = \sum_{s=1}^{\infty} s t^{s-1} \mathbb{P}(S = s)$$

e como

$$g_S(t) = g_N(g_X(t)) = e^{\lambda(g_X(t)-1)},$$

então, $g_S'(t) = \lambda g_S(t) g_X'(t)$.

Substituindo $g_S(\cdot)$ *e* $g_X'(\cdot)$ *pelas suas expansões em série, obtém-se*

$$\begin{aligned}
\lambda g_S(t) g_X'(t) &= \lambda\left(\sum_{s=0}^{\infty} t^s \mathbb{P}(S=s)\right)\left(\sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1}\mathbb{P}(X=x)\right)\\
&= \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \lambda x t^{s+x-1}\mathbb{P}(S=s)\mathbb{P}(X=x)\\
&= \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{\nu=x}^{\infty} \lambda x t^{\nu-1}\mathbb{P}(S=\nu-x)\mathbb{P}(X=x)\\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{\nu} \lambda x t^{\nu-1}\mathbb{P}(S=\nu-x)\mathbb{P}(X=x).
\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de t^{s-1} *desta expressão com os da expressão anterior para* $\frac{dg_S}{dt}(t)$, *conclui-se que*

$$s\mathbb{P}(S=s) = \sum_{x=1}^{s} \lambda x\, \mathbb{P}(S=s-x)\mathbb{P}(X=x),$$

ou seja,

$$f(s) = \sum_{x=1}^{s} \frac{\lambda x}{s} p(x) f(s-x),$$

que coincide com o que se obteve em (3.5.1).

Exemplo 3.5.8. *Seja* $\alpha \in [-\infty, \infty]$, $\lambda > 0$ *e suponha que* $S = X_1 + \ldots + X_{N_\alpha}$, *tem distribuição composta em que* N_α *tem função de probabilidade dada em* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *por*

$$q_n^\alpha := \mathbb{P}(N_\alpha = n) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-\alpha} \frac{\lambda^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha + i}{\alpha + \lambda}.$$

1. *Mostre que* q_n^α *satisfaz a equação recursiva da fórmula de Panjer, explicitando os valores de* a *e* b.

Note que se pode reescrever q_n^α *da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} q_n^\alpha := & \Big(1+\frac{\lambda}{\alpha}\Big)^{-\alpha}\frac{\lambda^{n-1}\lambda}{n(n-1)!}\prod_{i=0}^{n-2}\frac{\alpha+i}{\alpha+\lambda} \\ = & \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\Big)\frac{\alpha+k-1}{k} \\ = & \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\Big)\Big[1+\frac{\alpha-1}{k}\Big] = a+\frac{b}{k}, \end{aligned}$$

onde

$$a=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \quad e \quad b=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}(\alpha-1).$$

2. *Mostre que* $\mathbb{E}[N_\alpha]=\lambda$.

   Por definição de esperança de uma variável aleatória discreta tem-se que

$$\mathbb{E}[N_\alpha]=\sum_{n\geq 0} n\Big(1+\frac{\lambda}{\alpha}\Big)^{-\alpha}\frac{\lambda^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\alpha+i}{\alpha+\lambda}.$$

   Por outro lado, tem-se que

$$\frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)=\frac{(\alpha+n-1)!}{n!(\alpha-1)!},$$

   donde resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_\alpha] = & \Big(1+\frac{\lambda}{\alpha}\Big)^{-\alpha}\sum_{n\geq 0} n\frac{\lambda^n}{(\alpha+\lambda)^n}\frac{(\alpha+n-1)!}{n!(\alpha-1)!} \\ = & \Big(1+\frac{\lambda}{\alpha}\Big)^{-\alpha}\sum_{n\geq 0} n\frac{\lambda^n}{(\alpha+\lambda)^n}\frac{(\alpha+n-1)!}{n!(\alpha-1)!}. \end{aligned}$$

   Note que a soma atrás, a menos de uma constante, é a média de uma variável aleatória com distribuição Binomial negativa com parâmetros $r=\alpha$ *e* $p=\lambda/(\alpha+\lambda)$, *cuja média coincide com* $r(1-p)/p=\lambda$.

   Sendo assim,

$$\mathbb{E}[N_\alpha]=\Big(1+\frac{\lambda}{\alpha}\Big)^{-\alpha}\Big(1+\frac{\alpha}{\lambda}\Big)^{\alpha}\frac{r(1-p)}{p}=\lambda.$$

3. *Sabendo que a função geradora de probabilidades de N_α é dada por*

$$g_{N_\alpha}(t) = \Big(1 - \frac{\lambda(t-1)}{\alpha}\Big)^{-\alpha},$$

encontre $m_{N_\alpha}(t)$ e mostre que $Var[N_\alpha] = \lambda(1+\lambda/\alpha)$.

Sabe-se que $g_{N_\alpha}(t) = m_{N_\alpha}(\log(t))$, donde resulta, por uma mudança de variável que $m_{N_\alpha}(u) = g_{N_\alpha}(\exp(u))$. Usando a expressão de g_{N_α} obtém-se

$$m_{N_\alpha}(u) = \Big(1 - \frac{\lambda(\exp(u)-1)}{\alpha}\Big)^{\alpha} = \Big(\frac{\alpha}{\alpha - \lambda(\exp(u)-1)}\Big)^{\alpha}.$$

Para determinar a média e variância de N_α basta derivar a expressão anterior em ordem a u e, posteriormente, tomar $u = 0$. Ora, uma conta simples mostra que $m'_{N_\alpha}(0) = \lambda$ e $m''_{N_\alpha}(0) = \lambda + \lambda^2 + \lambda^2/\alpha$. Daqui resulta que

$$\mathbb{E}[N_\alpha] = \lambda \quad e \quad Var[N_\alpha] = \lambda\Big(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\Big).$$

4. *Encontre a distribuição de N_∞, calculando q_n^∞ e $m_{N_\infty}(t)$.*

Tomando o limite quando $\alpha \to \infty$ obtém-se

$$\begin{aligned} q_n^\infty := \mathbb{P}(N_\infty = n) &= \lim_{\alpha\to\infty} \Big(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\Big)^{-\alpha} \frac{\lambda^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \end{aligned}$$

que coincide com a função massa de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ.

Por outro lado, fazendo o limite quando $\alpha \to \infty$ obtém-se

$$m_{N_\infty}(u) = \lim_{\alpha\to\infty} \Big(\frac{\alpha}{\alpha - \lambda(e^u - 1)}\Big)^{\alpha} = e^{\lambda(e^u-1)},$$

que coincide com a função geradora de momentos de uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ.

3.6 Aproximações para distribuições compostas

As aproximações apresentadas no capítulo anterior também podem ser usadas quando o número de termos da soma é dado por uma variável aleatória.

Teorema 3.6.1 (Teorema Central do Limite para a distribuição Poisson composta)**.** *Suponha que S tem distribuição Poisson composta de parâmetro λ e cuja função de distribuição das indemnizações $P(\cdot)$ tem variância finita. Então,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x),$$

onde $\mu = \mathbb{E}[S]$ e $\sigma^2 = Var[S]$.

Demonstração

Como S tem distribuição de Poisson composta, então N tem distribuição de Poisson de parâmetro λ, $\lambda \in \mathbb{N}$, sabe-se que:

$$N \sim \sum_{j=1}^{\lambda} N_j$$

onde $\{N_j\}_{j\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson(1). Por outro lado, seja $\{X_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição $P(\cdot)$ e independentes de $\{N_j\}_{j\geq 1}$. Logo

$$S \sim \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}.$$

Para demonstrar a relação anterior basta mostrar que as funções geradoras de momentos coincidem. Para tal note que $m_S(t) = e^{\lambda(m_X(t)-1)}$. Seja agora

$$Z = \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}.$$

Ora,

$$
\begin{aligned}
m_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t\sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}}] &= \prod_{j=1}^{\lambda} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\bigcup_{n=0}^{\infty}\{N_j=n\}} e^{t\sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}}] \\
&= \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{N_j=n} e^{t\sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}}] = \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_j = n)\mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_{ij}}] \\
&= \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_j = n)(m_X(t))^n = \prod_{j=1}^{\lambda} m_{N_j}(\log(m_X(t))) \\
&= \prod_{j=1}^{\lambda} e^{m_X(t)-1} = e^{\lambda(m_X(t)-1)},
\end{aligned}
$$

como se queria provar.

Sendo assim, como S é uma soma de λ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, pode-se aplicar diretamente o Teorema Central do Limite visto no capítulo 2.

Para usar as aproximações que se viram anteriormente, precisamos de calcular os cumulantes de S.

Seja μ_k o momento de ordem k da distribuição das indemnizações, ou seja, $\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$. Então, para a distribuição de Poisson composta tem-se

$$
\kappa_S(t) = \lambda(m_X(t) - 1) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{t^k}{k!}.
$$

Sabe-se que os coeficientes de $\frac{t^k}{k!}$ são os cumulantes de S, logo

$$
\mathbb{E}[S] = \lambda\mu_1,\ \operatorname{Var}[S] = \lambda\mu_2,\ \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}(S))^3] = \lambda\mu_3 \dots
$$

O coeficiente de assimetria é proporcional a $\lambda^{-1/2}$, pois

$$
\gamma_S = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}\sqrt{\lambda}}.
$$

3.7 Distribuições para o montante de indemnizações

As seguintes distribuições de variáveis aleatórias positivas são adequadas para as indemnizações.

1. Distribuição Gama(α,β): Esta distribuição é usada se a cauda da função de distribuição não é muito pesada como, por exemplo, em seguros contra estragos no próprio veículo;

2. Distribuição Lognormal(μ,σ^2): para ramos de seguro com caudas mais pesadas, por exemplo, seguros de incêndio;

3. Distribuição Pareto(α, x_0): para ramos com probabilidades consideráveis de indemnizações de valores elevados como em seguros de responsabilidade.

Outras distribuições usadas são, por exemplo, a distribuição Gaussiana inversa e misturas/combinações de distribuições exponenciais.

Exemplo 3.7.1. *(Misturas/combinações de distribuições exponenciais)*

As misturas ou combinações de distribuições exponenciais são designadas por distribuições coxianas (ou distribuições de Cox). A mistura surge se o parâmetro de uma distribuição exponencial é uma variável aleatória que é igual a α com probabilidade q e β com probabilidade $1-q$. A densidade é dada por

$$p(x) = q\alpha e^{-\alpha x} + (1-q)\beta e^{-\beta x},\ x > 0.$$

Para todo o q com $0 \leq q \leq 1$, $p(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade. Para tal note que $p(\cdot) \geq 0$ e além disso $\int_{\mathbb{R}} p(x) = 1$.

Também há outros casos para $q < 0$ ou $q > 1$, em que $p(\cdot)$ pode ser uma função densidade de probabilidade. Nesses casos, $p(x)$ deve ser tal que $p(x) \geq 0\ \forall\, x$.

Se $q > 1$ e se assumirmos que $\alpha < \beta$, então $p(0) \geq 0$ implica

$$1 < q \leq \frac{\beta}{\beta - \alpha}$$

e neste caso $p(x)$ é designada por combinação de distribuições exponenciais.

Nota 3.7.2. *Exemplos de combinações de distribuições exponenciais:*

1. $p(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x}) = 2 \times 1e^{-1x} - 1 \times 2e^{-2x}$,

   onde $q = 2$, $\alpha = 1$ *e* $\beta = 2$.

2. $p(x) = \frac{4}{3}\left(e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) = \frac{4}{3} \times 1e^{-1x} - \frac{1}{3} \times 2e^{-2x}$,

   onde $q = \frac{4}{3}$, $\alpha = 1$ *e* $\beta = 2$.

Existe um modelo que produz todas as variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade dada por

$$p(x) = q\alpha e^{-\alpha x} + (1-q)\beta e^{-\beta x}, x > 0.$$

Para tal, sejam X, Y e I independentes com X e $Y \sim$Exp(1) e $I \sim$Ber(γ) com $0 \leq \gamma \leq 1$ e seja $0 < \alpha < \beta$. Então

$$Z = I\frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta}$$

tem a seguinte função geradora de momentos

$$m_Z(t) = \left(1 - \gamma + \gamma\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)\frac{\beta}{\beta - t} = \frac{\alpha\beta - t\beta(1-\gamma)}{(\alpha - t)(\beta - t)}.$$

Para provar a igualdade anterior note que

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t\frac{IX}{\alpha} + t\frac{Y}{\beta}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{t\frac{IX}{\alpha}}]\mathbb{E}[e^{t\frac{Y}{\beta}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{t\frac{IX}{\alpha}}]\frac{\beta}{\beta - t}. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{t\frac{IX}{\alpha}}] =& \mathbb{E}[e^{t\frac{IX}{\alpha}}|I = 1]\mathbb{P}(I = 1) + \mathbb{E}[e^{t\frac{IX}{\alpha}}|I = 0]\mathbb{P}(I = 0) \\ =& \mathbb{E}[e^{t\frac{X}{\alpha}}|I = 1]\gamma + (1-\gamma) = \mathbb{E}[e^{t\frac{X}{\alpha}}]\gamma + (1-\gamma) \\ =& \frac{\alpha}{\alpha - t}\gamma + (1-\gamma). \end{aligned}$$

Para mostrar que $m_Z(t)$ é a função geradora de momentos de uma combinação ou de uma mistura de distribuições exponenciais, basta encontrar q,

usando frações parciais, tal que $m_Z(t)$ é igual à função geradora de momentos de $p(x)$, que é
$$q\frac{\alpha}{\alpha-t}+(1-q)\frac{\beta}{\beta-t}.$$
Comparando esta expressão com $m_Z(t)$, obtém-se $\beta(1-\gamma)=q\alpha+\beta(1-q)$, logo
$$q=\frac{\beta\gamma}{\beta-\alpha}.$$
Como $0<\alpha<\beta$, tem-se $0\leq q\leq 1$ se $0\leq\gamma\leq 1-\dfrac{\alpha}{\beta}$ e, assim, Z é uma mistura de distribuições exponenciais. Se $1-\dfrac{\alpha}{\beta}<\gamma\leq 1$, então $q>1$ e Z é uma combinação de distribuições exponenciais.

A perda Z em $Z=I\dfrac{X}{\alpha}+\dfrac{Y}{\beta}$ pode ser vista como resultado de uma experiência, em que se perde $\dfrac{Y}{\beta}$ e em que é decidido, lançando uma moeda ao ar com probabilidade γ de sucesso, se se perde um montante adicional $\dfrac{X}{\alpha}$.

Outra interpretação é, que a perda é obtida ou a partir de $\dfrac{Y}{\beta}$ ou $\dfrac{X}{\alpha}+\dfrac{Y}{\beta}$, porque $Z=I\left(\dfrac{X}{\alpha}+\dfrac{Y}{\beta}\right)+(1-I)\dfrac{Y}{\beta}$.

Se $\gamma=1$ obtém-se que $Z=\dfrac{X}{\alpha}+\dfrac{Y}{\beta}$, ou seja, Z é a soma de duas distribuições exponenciais.

3.8 Resseguros stop-loss e aproximações

Exemplo 3.8.1. *(Prémios stop-loss para a distribuição Normal)*

Qual o prémio stop-loss com retenção d se $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$?

Primeiro, toma-se $U\sim\mathcal{N}(0,1)$ e depois usa-se o facto de que se $U\sim\mathcal{N}(0,1)$, então $\sigma U+\mu\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Logo
$$\pi_X(d)=\mathbb{E}[(X-d)_+]=\mathbb{E}[(\sigma U+\mu-d)_+]=\sigma\mathbb{E}\left[\left(U-\frac{d-\mu}{\sigma}\right)_+\right].$$
Assim, basta calcular o prémio stop-loss para U. Seja $\varphi(u)$ a função densidade

de U, ou seja, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$. Então, $\varphi(u)' = -u\varphi(u)$. Daqui resulta que

$$\begin{aligned}\pi(d) = \mathbb{E}[(U-d)_+] &= \int_d^\infty (u-d)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \varphi(d) - \int_d^\infty d\varphi(u)\,\mathrm{d}u = \varphi(d) - d(1-\Phi(d)),\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\mathbb{E}[(X-d)_+] = \sigma\varphi\Big(\frac{d-\mu}{\sigma}\Big) - (d-\mu)\Big(1-\Phi\Big(\frac{d-\mu}{\sigma}\Big)\Big).$$

Exemplo 3.8.2. *(Prémios stop-loss para a distribuição Gama)*

Qual o prémio stop-loss com retenção $d > 0$ se $X \sim Gama(\alpha,\beta)$?

Seja $G(\cdot,\alpha,\beta)$ a função de distribuição de X e f_X a função densidade de probabilidade $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{x>0}$. Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-d)_+] &= \int_d^\infty (u-d) f_X(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_d^\infty \frac{\beta^\alpha u^\alpha e^{-\beta u}}{\Gamma(\alpha)}\,\mathrm{d}u - d(1-G(d,\alpha,\beta)) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta} \int_d^\infty \frac{\beta^{\alpha+1} u^\alpha e^{-\beta u}}{\Gamma(\alpha+1)}\,\mathrm{d}u - d(1-G(d,\alpha,\beta)) \\ &= \frac{\alpha}{\beta}(1-G(d,\alpha+1,\beta)) - d(1-G(d,\alpha,\beta)).\end{aligned}$$

Exemplo 3.8.3. *(Aproximação dos prémios stop-loss por NP)*

Para $u \geq 1$ e $y \geq 1$ defina

$$\begin{aligned}q(u) &= u + \frac{\gamma}{6}(u^2-1) \\ w(y) &= \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6y}{\gamma} + 1} - \frac{3}{\gamma}.\end{aligned}$$

Tem-se que $w(q(u)) = u$ e $q(w(y)) = y$. Além disso, q, w são funções crescentes e $q(u) \geq y$ se, e somente se, $w(y) \leq u$.

Seja Z uma variável aleatória com $\mathbb{E}[Z] = 0$, $\mathbb{E}[Z^2] = 1$ e com coeficiente de assimetria igual a $\gamma > 0$. Vai-se calcular o prémio stop-loss para uma variável aleatória X com $\mathbb{E}[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$ e coeficiente de assimetria γ.

Pela aproximação NP tem-se que

$$\mathbb{P}(Z > q(u)) = \mathbb{P}(w(Z) > w(q(u)) = u) \approx 1 - \Phi(u), \quad se \quad u \geq 1.$$

Suponha que $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ *e seja* $V = q(\max\{1, U\})$. *Então, se* $u \geq 1$, *tem-se que*

$$\mathbb{P}(V > q(u)) = \mathbb{P}(q(U) > q(u)) = \mathbb{P}(U > u) = 1 - \Phi(u).$$

Logo,

$$\mathbb{P}(Z > y) \approx \mathbb{P}(V > y) = 1 - \Phi(w(y)), \quad se \quad y \geq 1.$$

O prémio stop-loss de Z *é aproximado pelo prémio stop-loss de* V *pois:*

$$\begin{aligned}
\int_d^\infty \mathbb{P}(Z > y)\,\mathrm{d}y \approx \int_d^\infty \mathbb{P}(V > y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} (q(\max\{1, U\}) - d)_+ \varphi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{w(d)}^\infty (q(u) - d)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{w(d)}^\infty (u + \frac{\gamma}{6}(u^2 - 1) - d)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \varphi(w(d)) + \frac{\gamma}{6} w(d)\varphi(w(d)) - d(1 - \Phi(w(d))).
\end{aligned}$$

Concluindo, para qualquer risco Z *com* $\mathbb{E}[Z] = 0$, $Var[Z] = 1$ *e coeficiente de assimetria* γ, *uma aproximação para o prémio stop-loss de* Z *com retenção* d, *é dada por:*

$$\mathbb{E}[(Z - d)_+] \approx \varphi(w(d)) + \frac{\gamma}{6} w(d)\varphi(w(d)) - d(1 - \Phi(w(d))).$$

Exemplo 3.8.4. *(Comparando prémios stop-loss no caso de variâncias diferentes)*

Aqui vai-se comparar o prémio stop-loss de dois riscos com variâncias diferentes e com o mesmo valor esperado. Primeiro, observe que se U *é um risco não negativo com probabilidade* 1 *e cuja média é* $\mu = \mathbb{E}[U]$, *então*

$$\frac{Var[U]}{2} = \int_0^\infty \left\{ \mathbb{E}[(U - t)_+] - (\mu - t)_+ \right\} \mathrm{d}t.$$

Antes de prosseguir, faz-se a demonstração da igualdade anterior. Suponha inicialmente que $\mu - t < 0$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big\{\mathbb{E}[(U-t)_+] - (\mu-t)_+\Big\}\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \mathbb{E}[(U-t)_+]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \int_t^\infty (1-F_U(u))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \int_0^u (1-F_U(u))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\infty u(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que sendo U um risco não negativo com probabilidade 1, então $\mathbb{E}[U^2] = 2\int_0^\infty u(1-F_U(u))\,du$. Como $0 \le \mathbb{E}[U] = \mu < t$ e $t \in (0,\infty)$, então $\mu = 0$, donde resulta que $Var[U] = \mathbb{E}[U^2]$ e o resultado fica provado.

Suponha agora que $\mu - t \ge 0$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big\{\mathbb{E}[(U-t)_+] - (\mu-t)_+\Big\}\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \Big\{\mathbb{E}[(U-t)_+] - (\mu-t)\Big\}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \Big(\int_t^\infty (1-F_U(u))\,\mathrm{d}u - \int_t^\mu 1\,\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \int_0^u (1-F_U(u))\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - \int_0^\mu \Big(\int_0^u 1\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\infty u(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u - \int_0^\mu u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}[U^2] - (\mathbb{E}[U])^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}Var[U].\end{aligned}$$

Logo, se U e W têm o mesmo valor esperado μ, então

$$\frac{Var[U]}{2} - \frac{Var[W]}{2} = \int_0^\infty \Big\{\mathbb{E}[(U-t)_+] - \mathbb{E}[(W-t)_+]\Big\}\mathrm{d}t.$$

Usando a aproximação da integral pela soma de Riemann com intervalos de tamanho 1, tem-se que

$$\frac{Var[U]}{2} - \frac{Var[W]}{2} \approx \sum_{i=1}^\infty \Big\{\mathbb{E}[(U-i)_+] - \mathbb{E}[(W-i)_+]\Big\}.$$

Acima, se os dois integrandos são aproximadamente proporcionais, então

$$\frac{\mathbb{E}[(U-t)_+] - (\mu-t)_+}{\mathbb{E}[(W-t)_+] - (\mu-t)_+} \approx \frac{Var[U]}{Var[W]}. \tag{3.8.1}$$

Esta aproximação é exata se $W=(1-I)\mu+IU$*, com* $\mathbb{E}[U]=\mu$ *e* $I\sim$*Bernoulli*(α) *independente de* U*, onde* $\alpha=Var[W]/Var[U]$*.*

Para tal note que, $\mathbb{E}[W]=\mathbb{E}[(1-I)\mu+IU]=(1-\alpha)\mu+\alpha\mathbb{E}[U]=(1-\alpha)\mu+\alpha\mu=\mu$*. Agora vai-se calcular a função de distribuição de* W*. Ora,*

$$\begin{aligned}
F_W(w)&=\mathbb{P}(W\leq w)\\
&=\mathbb{P}((1-I)\mu+IU\leq w|I=1)\mathbb{P}(I=1)+\mathbb{P}((1-I)\mu+IU\leq w|I=0)\mathbb{P}(I=0)\\
&=\mathbb{P}(U\leq w|I=1)\alpha+\mathbb{P}(\mu\leq w|I=0)(1-\alpha)\\
&=\mathbb{P}(U\leq w)\alpha+\mathbb{P}(\mu\leq w)(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Ora, se $w<\mu$*, tem-se que* $F_W(w)=F_U(w)\alpha$*, e se* $w\geq\mu$*, então* $F_W(w)=F_U(w)\alpha+(1-\alpha)$*.*

Suponha então que $\mu-t<0$*. Logo o lado esquerdo de* (3.8.1) *fica igual a*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[(U-t)_+]}{\mathbb{E}[(W-t)_+]}&=\frac{\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u}{\int_t^\infty(1-F_W(u))\,\mathrm{d}u}\\
&=\frac{\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u}{\int_t^\infty(1-1+\alpha-\alpha F_U(u))\,\mathrm{d}u}\\
&=\frac{\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u}{\alpha\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u}\\
&=\frac{1}{\alpha}=\frac{Var[U]}{Var[W]}.
\end{aligned}$$

No outro caso, ou seja, $\mu-t\geq0$*, tem-se que o lado esquerdo de* (3.8.1) *fica igual a*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[(U-t)_+]-(\mu-t)}{\mathbb{E}[(W-t)_+]-(\mu-t)}&=\frac{\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u-(\mu-t)}{\int_t^\infty(1-F_W(u))\,\mathrm{d}u-(\mu-t)}\\
&=\frac{\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u-(\mu-t)}{\int_t^\mu(1-F_W(u))\,\mathrm{d}u+\int_\mu^\infty(1-F_W(u))\,\mathrm{d}u-(\mu-t)}\\
&=\frac{\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u-(\mu-t)}{\alpha\int_t^\infty(1-F_U(u))\,\mathrm{d}u-\alpha(\mu-t)}\\
&=\frac{1}{\alpha}=\frac{Var[U]}{Var[W]},
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade se teve em conta que, se $u < \mu$, então $F_W(u) = \alpha F_U(u)$ e se $u \geq \mu$, então $F_W(u) = \alpha F_U(u) + (1-\alpha)$.

Se $t \geq \mu$, então $(\mu - t)_+ = 0$ e a aproximação (3.8.1) *simplifica para a regra empírica:*

$$\frac{\mathbb{E}[(U-t)_+]}{\mathbb{E}[(W-t)_+]} \approx \frac{Var[U]}{Var[W]}.$$

Exemplo 3.8.5. *(Avaliação numérica da regra empírica)*

Já foi visto acima que se $U \sim \mathcal{N}(0,1)$, então

$$\mathbb{E}[(U-t)_+] = \varphi(t) - t(1 - \Phi(t)).$$

Na tabela abaixo obtém-se os valores dos desvios dos prémios stop-loss de $\mathcal{N}(0, 1.01)$ e de $\mathcal{N}(0, 1.25)$ expressos em termos do factor de correção dado pela regra empírica:

t	$\pi(t)$ para $N(0,1)$	fatores $1+0.01\times$	de correção $1+0.25\times$
0	0.3989	0.50	0.47
0.5	0.19780	0.89	0.85
1	0.08332	1.45	1.45
1.5	0.02931	2.22	2.35
2	0.00849	3.20	3.73
2.5	0.00200	4.43	5.84
3	0.00038	5.92	9.10

3.9 Exercícios

1. Seja $S = X_1 + \ldots + X_N$, onde X_i, $i = 1 \ldots N$, as indemnizações individuais, são independentes e independentes da variável aleatória N.
   Calcule $\mathbb{E}[S]$, $\mathrm{Var}[S]$ e a função geradora de momentos $m_S(t)$ para os casos em que N tem a seguinte distribuição:

   (a) Poisson(λ);

   (b) Binomial(n, p);

   (c) Binomial negativa(r, p).

2. Suponha que S tem função de distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda = 2$ e $p(x) = \dfrac{x}{10}$, $x = 1, 2, 3, 4$. Calcule $\mathbb{P}(S = s)$ para $s \leq 4$.

3. Resolva o exercício anterior usando:

   (a) o algoritmo do vetor esparso;

   (b) o método recursivo de Panjer.

4. Complete a tabela do Exemplo 3.2.1 para $x = 0, \ldots, 6$. Determine o valor esperado e a variância de N, X e S.

5. Mostre que $\mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(N < n)$ se $Z \sim \text{Gama}(n, 1)$ e $N \sim \text{Poisson}(x)$.

6. Suponha que S_1 tem distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda_1 = 4$ e indemnizações $p_1(j) = \dfrac{1}{4}$, $j = 0, 1, 2, 3$, e que S_2 também tem distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda_2 = 2$ e $p_2(j) = \dfrac{1}{2}$, $j =$

$2, 4$.

Se S_1 e S_2 são independentes, qual é a distribuição de $S_1 + S_2$?

7. Suponha que S tem distribuição de Poisson composta de parâmetro λ e distribuição discreta de indemnizações $p(x)$, $x > 0$. Considere que S_0 tem distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda_0 = \dfrac{\lambda}{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, e distribuição de indemnizações $p_0(x)$, onde $p_0(0) = 1 - \alpha$ e $p_0(x) = \alpha p(x)$ para $x > 0$.

   Mostre que S e S_0 têm a mesma distribuição, comparando as funções geradoras de momentos respectivas.

8. Suponha que S_1 tem distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda = 2$ e distribuição de indemnizações dada por $p(1) = p(3) = \frac{1}{2}$. Seja $S_2 = S_1 + N$, em que N tem distribuição de Poisson(1) e é independente de S_1.

   Determine a função geradora de momentos de S_2. Qual é a distribuição correspondente?

9. Determine os parâmetros da distribuição de Poisson composta de Z de valores inteiros para um dado $\alpha > 0$, sabendo que a fórmula recursiva de Panjer é dada por

$$\mathbb{P}(Z = s) = f(s) = \frac{\alpha}{s}\left[f(s-1) + 2f(s-2)\right], \quad s = 1, 2, 3, \ldots.$$

   (Nota: Não esquecer $p(0)$.)

Capítulo 4

Teoria da Ruína

4.1 O modelo de Crámer-Lundberg a tempo discreto

Definição 4.1.1. *(Processo de risco a tempo discreto) O processo de risco* $U := \{U(n)\}_{n\geq 0}$ *é um processo estocástico definido para* $n \geq 0$ *por*

$$U(n) = u + cn - \sum_{k=1}^{n} S_k,$$

onde:

- $U(n)$ *representa o capital da seguradora no instante de tempo* n*;*
- $u = U(0)$ *é o capital inicial;*
- c *é o prémio (constante) recebido em cada período de tempo;*
- S_k *representa a indemnização agregada até ao tempo* k*.*

Assume-se que as variáveis aleatórias $\{S_k\}_{k\geq 1}$ *são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória* S*.*

Também se assume que $\mathbb{E}[U(n)] > \mathbb{E}[U(0)]$*, ou seja, que* $c > \mathbb{E}[S] = \mu$*.*

Define-se o tempo de ruína como o primeiro momento T em que o capital da seguradora é negativo, ou seja, $U(n) < 0$ e $U(j) \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$.

Definição 4.1.2. *(Tempo e probabilidade de ruína, probabilidade de sobrevivência)*

O tempo de ruína T é o primeiro instante em que a ruína ocorre, ou seja,

$$T = \min\{n \geq 1 : U(n) < 0\}$$

e a probabilidade de ocorrer ruína para o capital inicial u é definida por

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(T < +\infty \middle| U(0) = u\right).$$

A probabilidade de sobrevivência para o capital inicial u é definida por

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

Aqui assume-se a existência da função geradora de momentos de S para $r < a$ e que $\lim_{r \to a} m_S(r) = +\infty$.

Definição 4.1.3. *(Coeficiente de ajustamento)*

O coeficiente de ajustamento R é definido como a única raiz positiva da equação $\mathbb{E}\left[e^{r(S-c)}\right] = 1$, onde $r < a$.

Nota 4.1.4. *A equação acima é equivalente a $m_S(r) = e^{rc}$.*

Exemplo 4.1.5. *(S com distribuição de Poisson(θ))*

Ora, como $m_S(r) = e^{\theta(e^r-1)}$, então, o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de $\theta(e^r - 1) = rc$, ou seja

$$\theta e^r - rc = \theta.$$

Exemplo 4.1.6. *(S com distribuição Geométrica(p))*

Ora, como $m_S(r) = \frac{p}{1-(1-p)e^r}$, então o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de

$$(p+1)(e^{rc})^2 + e^{rc} - p = 0.$$

Exemplo 4.1.7. *(S com distribuição Binomial(n,p))*

Ora, $m_S(r) = [pe^r + 1 - p]^n$, então o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de

$$[pe^r + 1 - p]^n = e^{rc}.$$

Exemplo 4.1.8. *(S com distribuição Uniforme(a,b))*

Ora, $m_S(r) = \frac{e^{br} - e^{ar}}{(b-a)r}$, então, o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de

$$\tfrac{e^{br} - e^{ar}}{(b-a)r} = e^{rc}.$$

Exemplo 4.1.9. *(S com distribuição Exponencial(β))*

Ora, $m_S(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$, então o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de

$$(\beta - r)e^{rc} = \beta.$$

Exemplo 4.1.10. *(S com distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)*

Ora, $m_S(r) = e^{\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2}$, então o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de $\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 = rc$, isto é $R = \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}$.

4.1.1 Aproximação para o coeficiente de ajustamento

O cálculo do coeficiente de ajustamento nem sempre é fácil. Vai-se obter agora uma aproximação.

Note que $m_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}]$, então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(m_S(t))\Big|_{t=0} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_S(0)}{m_S(0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_S(0),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\log(m_S(t))\Big|_{t=0} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}m_S(t)m_S(t) - (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_S(t))^2}{(m_S(t))^2}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}m_S(0) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_S(0)\right)^2.$$

Usando a expansão em série de Taylor da função exponencial, tem-se que

$$m_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}\big[1 + tS + \frac{t^2S^2}{2!} + \ldots\big] = 1 + t\mathbb{E}[S] + \ldots,$$

donde resulta que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_S(0) = \mathbb{E}[S] = \mu$ e $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}m_S(0) = \mathbb{E}[S^2]$.

Daqui se conclui que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(m_S(t))\Big|_{t=0} &= \mu \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\log(m_S(t))\Big|_{t=0} &= \mathrm{Var}[S] = \sigma^2,
\end{aligned}$$

e pela série de Taylor do logaritmo tem-se que

$$\log(m_S(t)) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \ldots,$$

uma vez que $\log(m_S(0)) = 0$.

Ignorando termos de ordem superior a t^2, tem-se que

$$\log(m_S(r)) = rc \Leftrightarrow \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 \approx rc \Leftrightarrow R \approx \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2},$$

Note que no caso da Normal a aproximação coincide com o valor exato obtido acima.

Lema 4.1.11. *Se S tem distribuição composta, isto é, $S = X_1 + \ldots + X_N$ então*

$$R \approx \frac{2\alpha p_1 \mathbb{E}[N]}{(p_2 - p_1^2)\mathbb{E}[N] + p_1^2 Var[N]},$$

onde $p_i = \mathbb{E}[X^i]$ e $\alpha > 0$ é definido por $c = (1+\alpha)\mathbb{E}[N]p_1$.

Demonstração

Pela série de Taylor da exponencial e do logaritmo, tem-se que

$$\begin{aligned}
\log(m_S(r)) &= \log(1 + t\mathbb{E}[S] + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[S^2] + O(t^3)) \\
&= t\mathbb{E}[S] + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[S^2] - \frac{t^2}{2}(\mathbb{E}[S])^2 + O(t^3)) \\
&= rp_1\mathbb{E}[N] + \frac{1}{2}r^2\Big[\mathbb{E}[N]\big(p_2 - p_1^2\big) + p_1^2\mathrm{Var}[N]\Big].
\end{aligned}$$

Daqui conclui-se que

$$rp_1\mathbb{E}[N]+\frac{1}{2}r^2\Big\{\mathbb{E}[N]\big(p_2-p_1^2\big)+p_1^2\text{Var}(N)\Big\}\approx rc.$$

Considerando $c=(1+\alpha)\mathbb{E}[N]p_1$, obtém-se que

$$\begin{aligned}
&rc=(1+\alpha)\mathbb{E}[N]rp_1\approx rp_1\mathbb{E}[N]+\frac{1}{2}r^2\Big\{\mathbb{E}[N]\big(p_2-p_1^2\big)+p_1^2\text{Var}[N]\Big\}\\
\Leftrightarrow &r\Big[(1+\alpha)p_1\mathbb{E}[N]-p_1\mathbb{E}[N]\Big]-\frac{1}{2}r^2\Big[\mathbb{E}[N](p_2-p_1^2)+p_1^2\text{Var}[N]\Big]\approx 0\\
\Leftrightarrow &R\approx\frac{2\big(\mathbb{E}[N](1+\alpha)p_1-p_1\mathbb{E}[N]\big)}{(p_2-p_1^2)\mathbb{E}[N]+p_1^2\text{Var}[N]}\\
\Leftrightarrow &R\approx\frac{2\alpha p_1\mathbb{E}[N]\big)}{(p_2-p_1^2)\mathbb{E}[N]+p_1^2\text{Var}[N]}.
\end{aligned}$$

4.2 Processo de risco a tempo contínuo

Definição 4.2.1. *(Processo de risco a tempo contínuo)*

O processo de risco é um processo estocástico definido por

$$U(t)=u+ct-S(t),\ \ t\geq 0,$$

onde:

- $U(t)$ *representa o capital da seguradora no instante de tempo* t*;*
- $u=U(0)$ *é o capital inicial;*
- c *é o prémio (constante) por unidade de tempo;*
- $S(t)=X_1+X_2+\cdots X_{N(t)}$ *representa o montante total de indemnizações, em que* $N(t)$ *é o número de indemnizações até ao instante de tempo* t *e* X_i *é o valor da i-ésima indemnização.*

Assume-se que

- $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X.

- $\{X_i\}_{i\geq 1}$ são independentes de $N(t)$ para todo $t \geq 0$.
- $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ é um processo de contagem, além disso é um processo de Poisson.
- $\mathbb{E}[X] = \mu > 0$.

O processo de risco também é designado por Modelo clássico de Crámer-Lundberg.

A Figura 4.1 ilustra uma realização típica do processo de risco.

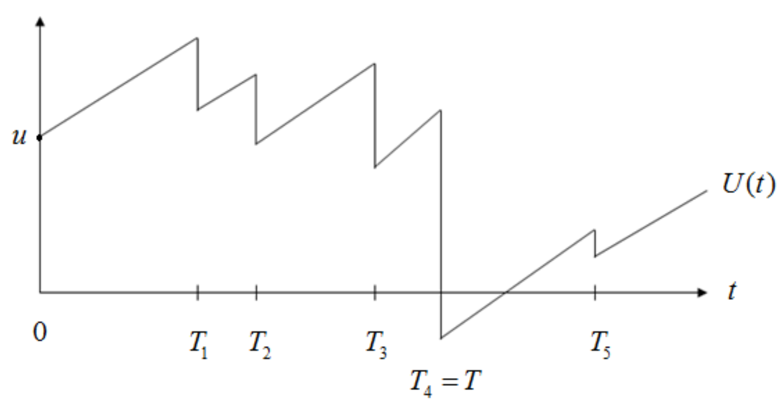


Figura 4.1: Processo de risco $U(t)$.

Para $i \geq 1$, a variável aleatória T_i representa o instante de tempo em que ocorre o i-ésimo pagamento de indemnização. O declive do processo é c se não existirem indemnizações, mas, se $t = T_j$ para algum j, então, nesse instante, o capital diminui X_j unidades, que corresponde ao valor da j-ésima indemnização.

Como em T_4 o montante total das indemnizações $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ é mais elevado do que o capital inicial u mais o prémio cT_4, então o resto, $U(T_4)$, é menor do que 0.

Este estado do processo designa-se por ruína e o primeiro instante de tempo em que a ruína ocorre é representado por T.

Assim,

$$T = \begin{cases} min\{t \,|\, t \geq 0, U(t) < 0\}; \\ \infty \quad \text{se } U(t) \geq 0 \text{ para todo o } t. \end{cases}$$

Definição 4.2.2. *(Probabilidade de ruína)*

A probabilidade de T ser um tempo finito, partindo do capital inicial u, é designada por probabilidade de ruína e é representada por

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u).$$

Definição 4.2.3. *(Probabilidade de sobrevivênvia)*

A probabilidade de sobrevivência é definida por

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

Definição 4.2.4. *(Processo de Poisson)*

O processo $N(t)$ é um processo de Poisson se para alguma intensidade $\lambda > 0$, os incrementos do processo são tais que

$$N(t+h) - N(t) \sim Poisson(\lambda h)$$

para todo o $t > 0$, $h > 0$ e realização $N(s)$, $s \leq t$.

Num processo de Poisson, os incrementos têm as seguintes propriedades:

- os incrementos são independentes: se os intervalos $(t_i, t_i + h_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, são disjuntos, então $N(t_i + h_i) - N(t_i)$ são independentes;

- os incrementos são estacionários: $N(t+h) - N(t)$ tem distribuição de Poisson(λh), $\forall t$.

Também podemos considerar incrementos infinitesimais $N(t+\mathrm{d}t)-N(t)$ em intervalos infinitesimais $(t,t+\mathrm{d}t)$, onde o número infinitesimal dt é positivo, mas menor do que qualquer número real maior do que 0.

Para o processo de Poisson tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t+\mathrm{d}t)-N(t)=1|N(s),0\leq s\leq t) &= e^{-\lambda \mathrm{d}t}\lambda\mathrm{d}t=\lambda\mathrm{d}t,\\
\mathbb{P}(N(t+\mathrm{d}t)-N(t)=0|N(s),0\leq s\leq t) &= e^{-\lambda \mathrm{d}t}=1-\lambda\mathrm{d}t,\\
\mathbb{P}(N(t+\mathrm{d}t)-N(t)\geq 2|N(s),0\leq s\leq t) &= 0.
\end{aligned}$$

Estas igualdades são válidas se ignorarmos os termos de ordem superior ou igual a $(\mathrm{d}t)^2$. Para tal basta notar que $e^{-\lambda\mathrm{d}t}=1-\lambda\mathrm{d}t+O(\mathrm{d}t)^2$.

Outra forma de definir o processo é, considerando os tempos de espera

$$W_1=T_1,\, W_j=T_j-T_{j-1},\;\, j=2,3,\ldots\,.$$

Os tempos de espera são variáveis aleatórias independentes de distribuição Exponencial(λ) e também são independentes da realização do processo. Se H representa uma realização arbitrária do processo até ao instante de tempo t com a propriedade $T_{i-1}=t$, então

$$\mathbb{P}(W_i>h|H)=\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=0|H)=e^{-\lambda h}.$$

Se $N(t)$ é um processo de Poisson, então $S(t)$ é um processo de Poisson composto; para $t=t_0$ fixo, as indemnizações $S(t_0)$ têm distribuição composta de Poisson com parâmetro λt_0.

Suponha que o primeiro acidente ocorre no tempo T_1, o segundo no tempo T_2, e assim sucessivamente. Até à ocorrência do primeiro sinistro, este processo toma o valor 0. Em cada um dos tempos seguintes, o processo vai tomando valores espaçados de uma unidade.

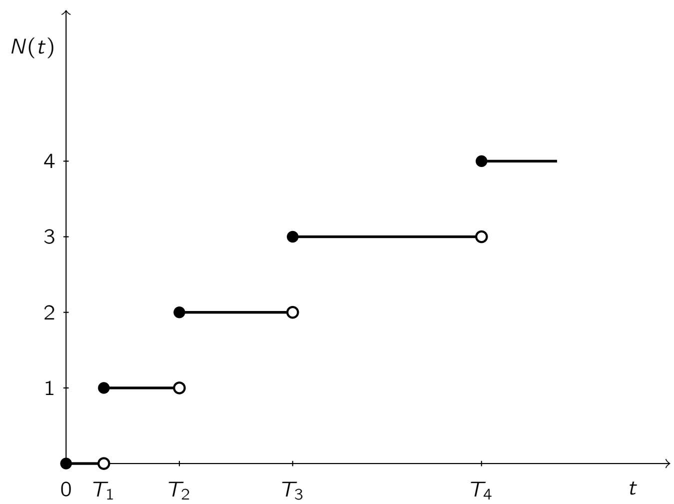


Figura 4.2: Processo de Poisson $N(t)$.

Vai-se exigir que o valor do prémio c seja tal que $\mathbb{E}[U(t)] > \mathbb{E}[U(0)]$, ou seja, $\mathbb{E}[U(t)] = u + ct - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)] = u + ct - \lambda t\mu > \mathbb{E}[U(0)] = u$, isto é, $c > \lambda\mu$. Sendo assim faz sentido introduzir o coeficiente de segurança:

Definição 4.2.5. *(Coeficiente de segurança)*

O coeficiente de segurança $\theta > 0$ é definido através de $c = (1+\theta)\lambda\mu$.

Definição 4.2.6. *(Coeficiente de ajustamento)*

O coeficiente de ajustamento $R > 0$ para indemnizações $X \geq 0$ com $\mathbb{E}[X] = \mu > 0$ é a única solução positiva da seguinte equação em r:

$$1 + (1+\theta)\mu r = m_X(r).$$

O coeficiente de ajustamento também pode ser determinado a partir da seguinte equação que é equivalente à anterior: $\lambda + cr = \lambda m_X(r)$, ou se $t = 1$ a partir da equação $e^{rc} = \mathbb{E}[e^{rS}]$, ou a partir da equação

$$\int_0^\infty e^{rx}(1 - F_X(x))\mathrm{d}x = \frac{c}{\lambda}.$$

Para provar as equivalências anteriores faz-se o seguinte. A primeira é imediata pela definição de coeficiente de segurança. A segunda resulta do facto de que como S tem distribuição de Poisson composta de parâmetro λ, então $m_S(r) = e^{\lambda(m_X(r)-1)}$ e a equação $e^{rc} = \mathbb{E}[e^{rS}]$ fica igual a $e^{rc} = e^{\lambda(m_X(r)-1)}$, ou seja, $\lambda + cr = \lambda m_X(r)$. Finalmente, para provar a terceira equivalência, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{rx}(1-F_X(x))\mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{rx} \int_x^\infty dF_X(y)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \Big(\int_0^y e^{rx}\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}F_X(y) \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{r}(e^{ry}-1)\,\mathrm{d}F_X(y) \\
&= \frac{m_X(r)-1}{r}.
\end{aligned}$$

É possível provar que a equação $1+(1+\theta)\mu r = m_X(r)$ tem apenas uma raiz positiva. Para tal ter-se-à que impor a seguinte condição sobre a variável aleatória X, nomeadamente, a existência de um número $a > 0$ tal que $\lim_{r\to a} m_X(r) = \infty$. Agora, observe que a função $f(r) = 1+(1+\theta)\mu r$ é linear em r, passa por $(0,1)$ e tem declive $(1+\theta)\mu$. Por outro lado, $\lim_{r\to a} m_X(r) = \infty$, $m_X(0) = 1$, $m'_X(r) = \mathbb{E}[Xe^{rX}]$, $m'_X(0) = \mu$, $m''_X(r) = \mathbb{E}[X^2 e^{rX}]$. Note que acima derivou-se a função $m_X(r)$ em ordem a r, passando a derivada para dentro da esperança, uma vez que a esperança é uma integral com respeito a X e não à variável r. Daqui conclui-se que, $m_X(r)$ é uma função crescente, convexa e passa por $(0,1)$. Como $\theta > 0$, $f'(0) > m'_X(0)$. Considerando a função $g(r) = f(r) - m_X(r)$, verifica-se que $g(0) = 0$, $g'(0) = \theta\mu > 0$ e $g''(r) = -m''_X(r) < 0$, uma vez que X é positiva. Logo a função g anula-se em $r = 0$, é crescente numa vizinhança de $r = 0$ e é côncava, logo tem que se anular num outro ponto $r = R$. Daqui conclui-se que a equação $1+(1+\theta)\mu r = m_X(r)$ tem 2 soluções, uma trivial $(r = 0)$ e outra positiva $r = R$ que é o coeficiente de ajustamento (veja a Figura 4.3).

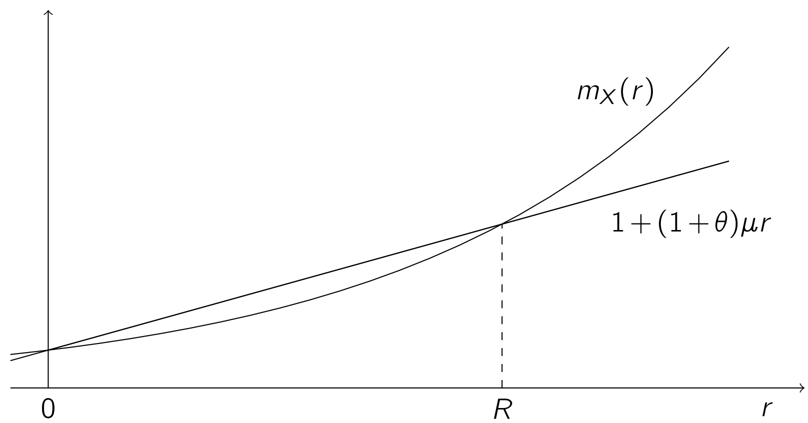


Figura 4.3: Determinação do coeficiente de ajustamento R.

Exemplo 4.2.7. *(Coeficiente de ajustamento para uma distribuição exponencial)*

Suponha que X tem distribuição exponencial de parâmetro $\beta = \frac{1}{\mu}$. O coeficiente de ajustamento correspondente é a solução positiva de

$$1+(1+\theta)\mu r = m_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r},$$

para $r < \beta$. As soluções desta equação são $r = 0$ e $r = R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}$.

Exemplo 4.2.8.

Considere o processo de risco $U(t) = u + ct - S(t)$, $t \geq 0$, em que a distribuição das indemnizações é discreta com $p(1) = p(2) = \frac{1}{2}$.
Determine o coeficiente de segurança θ, sabendo que o coeficiente de ajustamento é dado por $R = \log 3$.

O valor esperado das indemnizações discretas é $\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}$ e a função geradora de momentos correspondente é

$$m_X(r) = \frac{1}{2}\left(e^r + e^{2r}\right).$$

Substituindo estas expressões na fórmula $m_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu r$, obtém-se

$$\frac{1}{2}\left(e^r + e^{2r}\right) = 1 + \frac{3}{2}(1+\theta)r.$$

Como o coeficiente de ajustamento é dado por $r = R = \log 3$, então resolvendo a equação anterior em ordem a θ, resulta que

$$\theta = \frac{10}{3\log 3} - 1 \approx 2.03413.$$

Exemplo 4.2.9.

Considere o processo de risco $U(t) = u + ct - S(t)$, $t \geq 0$, em que o capital inicial é $u = 10$ e em que as indemnizações X têm distribuição exponencial de parâmetro $\beta = 12$. Sabe-se ainda que o coeficiente de segurança é dado por $\theta = 5$. Determine o coeficiente de ajustamento R.

Dado que X segue uma distribuição exponencial de parâmetro $\beta = 12$, então tem-se que

$$\mu = \frac{1}{12}, \;\; m_X(r) = \frac{12}{12-r}.$$

Assim, a equação $m_x(r) = 1 + (1+\theta)\mu r$ fica da forma

$$\frac{12}{12-r} = 1 + \frac{1}{2}r.$$

Esta equação é quadrática em r e resolvendo-a em ordem a r, obtém-se $r = 0$ e o coeficiente de ajustamento $r = R = 10$.

4.3 Teorema fundamental do risco

Teorema 4.3.1. *(Teorema fundamental do risco)*

Para $u \geq 0$, tem-se que

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)} | T < \infty]},$$

onde R representa o coeficiente de ajustamento.

Demonstração

Para quaisquer $t > 0$, $r > 0$ tem-se

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}] = \mathbb{E}[e^{-rU(t)} | T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-rU(t)} | T > t]\mathbb{P}(T > t).$$

Como $U(t) = u + ct - S(t)$, então

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}] = e^{-ru-rct+\lambda t(m_X(r)-1)}.$$

Para $r = R$, tem-se que $\mathbb{E}[e^{-RU(t)}] = e^{-Ru}e^{-Rct}e^{\lambda t(m_X(R)-1)} = e^{-Ru}$.

Para $T \leq t$ pode escrever-se

$$U(t) = U(T) + c(t-T) - [S(t) - S(T)],$$

donde resulta que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T \leq t] &= \mathbb{E}[e^{-rU(T)-rc(t-T)+r[S(t)-S(T)]}|T \leq t] \\ &= e^{-rc(t-T)}\mathbb{E}[e^{-rU(T)+r[S(t)-S(T)]}|T \leq t].\end{aligned}$$

Agora, usando o facto de que $T \leq t$ então $U(T)$ e $S(t) - S(T)$ são independentes e como $S(t) - S(T)$ tem distribuição de Poisson composta com parâmetro $\lambda(t - T)$, a expressão atrás fica igual a

$$e^{-rc(t-T)}\mathbb{E}[e^{-rU(T)}|T \leq t]e^{\lambda(t-T)[m_X(r)-1]},$$

e como R é o coeficiente de ajustamento, simplifica para $\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]$.

Logo,

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t).$$

Agora note que $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(T < \infty)$. Logo,

$$\begin{aligned}e^{-Ru} &= \lim_{t\to\infty} \left\{\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t)\right\} \\ &= \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]\mathbb{P}(T < \infty) + \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t)\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Para terminar a prova basta provar que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) = 0.$$

Ora, usando o facto de que como $T > t$ então $U(t) \geq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{E}[e^{-RU(t)}, T > t] \\
&= \mathbb{E}[e^{-RU(t)}, T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)] \\
&\qquad + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}, T > t, U(t) > u_0(t)] \\
&= \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)]\mathbb{P}(T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)) \\
&\qquad + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t, U(t) > u_0(t)]\mathbb{P}(T > t, U(t) > u_0(t)) \\
&\leq \mathbb{P}(U(t) \leq u_0(t)) + \mathbb{E}[e^{-Ru_0(t)}].
\end{aligned}$$

Se $\lim_{t\to\infty} u_0(t) = \infty$, então

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[e^{-Ru_0(t)}] = 0.$$

Note que

$$\mathbb{E}[U(t)] = u + ct - \lambda\mu_1 t := \mu(t),$$

$$\mathrm{Var}[U(t)] = t\lambda\mu_2.$$

Sendo assim, escolhe-se, por exemplo

$$u_0(t) = \mu(t) - t^{2/3}\lambda\mu_2.$$

Note que

$$\lim_{t\to\infty} u_0(t) = \infty,$$

logo

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[e^{-Ru_0(t)}] = 0.$$

Por outro lado, da desigualdade de Chebychev, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U(t) \leq u_0(t)) &= \mathbb{P}(U(t) - \mu(t) \leq -t^{2/3}\lambda\mu_2) \\
&\leq \mathbb{P}(|U(t) - \mu(t)| \geq t^{2/3}\lambda\mu_2) \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}[U(t)]}{t^{4/3}\mu_2^2\lambda^2} \leq \frac{C}{t^{1/3}},
\end{aligned}$$

que tende a 0, quando $t \to \infty$.

Logo, tomando o limite quando $t \to \infty$ na igualdade (4.3.1) obtém-se

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]\mathbb{P}[T < \infty],$$

ou seja,

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]}.$$

□

Corolário 4.3.2. *(Desigualdade de Lundberg)*

Para $u \geq 0$, tem-se que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

onde R representa o coeficiente de ajustamento.

Demonstração

Esta desigualdade pode facilmente ser obtida a partir do Teorema Fundamental do Risco, tendo em conta que o denominador excede o valor 1, porque, dado o capital no momento da ruína, $U(T)$ é necessariamente negativo.

□

O coeficiente de ajustamento tem a propriedade de $\mathbb{E}[e^{-RU(t)}]$ ser constante em t. Assim, $\{e^{-RU(t)}\}_{t\geq 0}$ é um martingal. Pois, como $U(t) = u + ct - S(t)$ e $S(t)$ tem distribuição composta de parâmetro λt, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-RU(t)}] &= \mathbb{E}[e^{-R\{u+ct-S(t)\}}] = e^{-Ru}\left[e^{-Rc}\exp\{\lambda(m_X(R)-1)\}\right]^t \\ &= e^{-Ru}. \end{aligned}$$

Nota 4.3.3. *(Consequências do teorema fundamental do risco)*

1. *Se $\theta \to 0$, então $R \to 0$, logo $\psi(u) \to 1$.*

2. *Se $\theta \leq 0$, então $\psi(u) = 1$ (a ruína é quase certa!)*

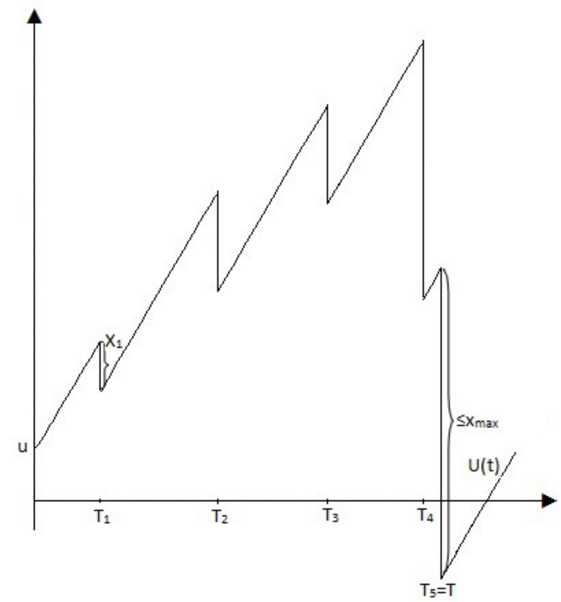
3. *Se b é uma cota superior para as indemnizações particulares, então $\psi(u) > e^{-R(u+b)}$.*

4. *Fixado $u > 0$, tem-se que $\lim_{R\to\infty} \psi(u) = 0$, ou seja, quanto maior for o coeficiente de ajustamento, menor será a probabilidade de ruína.*

5. *Fixado $R > 0$, tem-se que $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$, ou seja, quanto maior for o capital inicial, menor será a probabilidade de ruína.*

Para provar a primeira consequência note que para $g(r) = f(r) - m_X(r)$, tem-se que $g(0) = 0$, $g'(0) = \theta\mu$ e $g''(r) = -m''_X(r) < 0$. Quando $\theta \to 0$, tem-se que $g'(0) = \theta\mu \to 0$. Daqui resulta que próximo de $r = 0$ a função g é constante e nula, e como para além disso é côncava, ela não possui nenhum outro zero para além de $r = 0$. Logo o ponto de interseção de $m_X(r)$ e $f(r)$ é único, ou seja, $R \to 0$; e pela desigualdade de Lundberg, uma vez que $u \geq 0$, tem-se que $\psi(u) \to 1$.

Para provar a terceira consequência referida acima note que por definição de T, tem-se que $U(T^-) > 0$. Como o valor máximo da indemnização é b, tem-se que $U(T) \geq -b$, veja a figura abaixo.



Também se pode pensar no seguinte argumento alternativo. Como $F_X(b) = 1$*, tem-se que* $X_i \leq b$*, e assim*

$$-\sum_{i\geq 1}^{N(T)} X_i = -X_1 - \ldots - X_{N(T)} \geq -b,$$

ou seja, $-S(T) \geq -b$*. Como* $u > 0$ *e* $c > 0$*, então conclui-se que*

$$U(T) \geq -b.$$

Assim, $e^{-RU(T)} \leq e^{Rb}$ *e portanto, do Teorema Fundamental do risco obtém-se*

$$\psi(u) > \frac{e^{-Ru}}{e^{Rb}},$$

ou seja $\psi(u) > e^{-R(u+b)}$*.*

As consequências 4. e 5. decorrem facilmente da desigualdade de Lundberg.

Exemplo 4.3.4. *(X com distribuição exponencial de parâmetro θ)*

Começa-se por verificar que $-U(T)$ também tem distribuição exponencial com parâmetro θ.

Para tal, seja T o instante em que ocorre a ruína, $\hat{u}$ o capital imediatamente antes de T e seja $y > 0$. Note que os acontecimentos $-U(T) > y$ e $X > \hat{u}+y|X > \hat{u}$ são equivalentes. Se $-U(T) > y$ então $U(T) < -y$, logo a indemnização que deu origem à ruína tem que ser superior ao valor imediamente antes da ruína, nomeadamente $\hat{u}$, mais y, ou seja tem que ter ocorrido ruína, portanto $X > \hat{u}$, e condicionando a esse facto tem que se ter $X > \hat{u}+y$ (veja a Figura 4.4 para uma melhor compreensão).

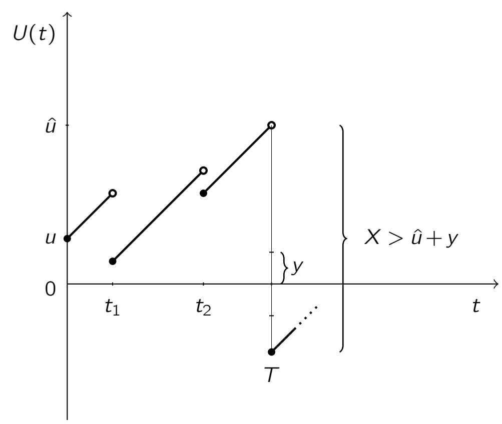


Figura 4.4: Processo $U(t)$ com $X > \hat{u}+y$.

Assim para $y > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(-U(T) > y \middle| T < +\infty\right) &= \mathbb{P}\left(X > \hat{u}+y \middle| X > \hat{u}\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(X > \hat{u}+y, X > \hat{u}\right)}{\mathbb{P}(X > \hat{u})} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(X > \hat{u}+y\right)}{\mathbb{P}(X > \hat{u})} \\
&= \frac{e^{-\theta(\hat{u}+y)}}{e^{-\theta\hat{u}}} \\
&= e^{-\theta y} = \mathbb{P}(X > y).
\end{aligned}$$

Logo condicionando a $T < +\infty$, $-U(T)$ tem distribuição Exponencial de parâmetro θ e portanto, $\mathbb{E}\left[e^{-R\,U(T)}\middle| T < +\infty\right] = \frac{\theta}{\theta - R}$, $\theta > R$, por ser a função geradora de momentos de uma exponencial de parâmetro θ.

Seja α o coeficiente de segurança dado por $\alpha = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ e recorde que $R = \frac{\alpha\theta}{1+\alpha}$. Logo

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{e^{-R\,u}}{\mathbb{E}\left[e^{-R\,U(T)}\middle| T < +\infty\right]} = \frac{e^{(-\alpha\theta u/(1+\alpha))}}{\left(\frac{\theta}{\theta-R}\right)} \\ &= \frac{\theta - R}{\theta} e^{(-\alpha\theta u/(1+\alpha))} = \frac{1}{1+\alpha} e^{(-\alpha\theta u/(1+\alpha))}.\end{aligned}$$

Nota 4.3.5. *Note que $\psi(0) = \frac{1}{1+\alpha}$ e como $\alpha = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$, obtém-se $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$. Nota-se que esta igualdade não é particular das indemnizações com distribuição exponencial, mas na verdade vale no caso geral, como se irá observar no Lema 4.4.4.*

4.4 Equações funcionais para a probabilidade de ruína

Teorema 4.4.1. *Para $u > 0$, tem-se que*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left[\psi(u) - \int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F_X(x) - (1 - F_X(u))\right].$$

Demonstração

Começa-se por fixar um intervalo de tempo infinitesimal $(0, dt)$ e faz-se a seguinte decomposição, tendo em conta o número de acidentes que ocorreram nesse intervalo, ou seja, $N(dt)$. Logo,

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \mathbb{P}(T < +\infty) \\ &= \mathbb{P}(T < +\infty, N(\mathrm{d}t) = 0, N(\mathrm{d}t) = 1, N(\mathrm{d}t) \geq 2) \\ &= \mathbb{P}(T < +\infty, N(\mathrm{d}t) = 0) + \mathbb{P}(T < +\infty, N(\mathrm{d}t) = 1) \\ &+ \mathbb{P}(T < +\infty, N(\mathrm{d}t) \geq 2) \\ &= \mathbb{P}\left(T < +\infty \middle| N(\mathrm{d}t) = 0\right)\mathbb{P}(N(\mathrm{d}t) = 0) \\ &+ \mathbb{P}\left(T < +\infty \middle| N(\mathrm{d}t) = 1\right)\mathbb{P}(N(\mathrm{d}t) = 1) \\ &+ \mathbb{P}\left(T < +\infty \middle| N(\mathrm{d}t) \geq 2\right)\mathbb{P}(N(\mathrm{d}t) \geq 2).\end{aligned}$$

Por definição de processo de Poisson homogéneo tem-se que

$$\mathbb{P}(N(\mathrm{d}t)=0)=1-\lambda\mathrm{d}t,$$
$$\mathbb{P}(N(\mathrm{d}t)=1)=\lambda\mathrm{d}t,$$
$$\mathbb{P}(N(\mathrm{d}t)\geq 2)=o(\mathrm{d}t).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T<+\infty \middle| N(\mathrm{d}t)=0\right) &= \mathbb{P}\left(T<+\infty \middle| S(\mathrm{d}t)=0\right)\\
&= \mathbb{P}\left(T<+\infty \middle| U(\mathrm{d}t)=u+c\mathrm{d}t\right)=\psi(u+c\mathrm{d}t),\\
\mathbb{P}\left(T<+\infty \middle| N(\mathrm{d}t)=1\right) &= \mathbb{P}\left(T<+\infty, X>u+c\mathrm{d}t \middle| N(\mathrm{d}t)=1\right)\\
&\quad+\mathbb{P}\left(T<+\infty, X\leq u+c\mathrm{d}t \middle| N(\mathrm{d}t)=1\right)\\
&= (1-F_X(u+c\mathrm{d}t))+\left(\int_0^{u+c\mathrm{d}t}\psi(u+c\mathrm{d}t-x)\mathrm{d}F_X(x)\right),\\
\mathbb{P}\left(T<+\infty \middle| N(\mathrm{d}t)\geq 2\right) &= o(\mathrm{d}t).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\psi(u) = (1-\lambda\mathrm{d}t)\,\psi(u+c\mathrm{d}t)+\lambda\mathrm{d}t\int_0^{u+c\mathrm{d}t}\psi(u+c\mathrm{d}t-x)\mathrm{d}F_X(x)\\
+\lambda\mathrm{d}t\,(1-F_X(u+c\mathrm{d}t))+o(\mathrm{d}t).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\psi(u) =&\psi(u+c\mathrm{d}t)\\
&-\lambda\mathrm{d}t\left[\psi(u+c\mathrm{d}t)-\int_0^{u+c\mathrm{d}t}\psi(u+c\mathrm{d}t-x)\mathrm{d}F_X(x)-[1-F_X(u+c\mathrm{d}t)]\right]+o(\mathrm{d}t).
\end{aligned}$$

Donde se conclui que,

$$\frac{\psi(u+c\mathrm{d}t)-\psi(u)}{c\mathrm{d}t}$$

se escreve como

$$\frac{\lambda}{c}\left[\psi(u+c\mathrm{d}t)-\int_0^{u+c\mathrm{d}t}\psi(u+c\mathrm{d}t-x)\mathrm{d}F_X(x)-[1-F_X(u+c\mathrm{d}t)]\right]+\frac{o(\mathrm{d}t)}{c\mathrm{d}t}.$$

Fazendo $dt\to 0$, segue que

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\left[\psi(u)-\int_0^{u}\psi(u-x)\mathrm{d}F_X(x)-[1-F_X(u)]\right].$$

□

Nota 4.4.2. *Como consequência do teorema anterior, resulta que para $u > 0$*

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\left[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-x)\mathrm{d}F_X(x)\right]. \tag{4.4.1}$$

Para tal note que

$$\begin{aligned}
\delta'(u) &= (1-\psi(u))' = -\psi'(u) \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[-1+\delta(u)+\int_0^u \big(1-\delta(u-x)\big)\mathrm{d}F_X(x)+(1-F_X(u))\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[-1+\delta(u)+\int_0^u \mathrm{d}F_X(x)-\int_0^u \delta(u-x)\mathrm{d}F_X(x)+1-F_X(u)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\delta(u)-\int_0^u \delta(u-x)\mathrm{d}F_X(x)\right].
\end{aligned}$$

Usando a igualdade obtida no teorema anterior, obtém-se uma expressão para $\psi(u)$ no teorema seguinte.

Teorema 4.4.3. *Para $u \geq 0$*

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^{+\infty}(1-F_X(x))\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)(1-F_X(x))\mathrm{d}x.$$

De forma equivalente, para $u \geq 0$,

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)(1-F_X(x))\mathrm{d}x. \tag{4.4.2}$$

Demonstração

Começa-se por integrar (4.4.1) entre 0 e t, ou seja

$$\int_0^t \delta'(u)\mathrm{d}u = \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^t \delta(u)\mathrm{d}u - \int_0^t\int_0^u \delta(u-x)\mathrm{d}F_X(x)\mathrm{d}u\right] \tag{4.4.3}$$

Pelo Teorema de Fubini e fazendo uma mudança de variável $y = u - x$, tem-se que

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\mathrm{d}u - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Big(\int_0^{t-x}\delta(y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}F_X(x).$$

Seja agora, $I(v) = \int_0^v \delta(y)\,\mathrm{d}y$. Fazendo integração por partes, obtém-se

$$\delta(t)-\delta(0) = \frac{\lambda}{c}I(t) - \frac{\lambda}{c}\Big(I(t) - \int_0^t \delta(t-x)(1-F_X(x))\mathrm{d}x\Big),$$

ou seja,

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-x)(1-F_X(x))\mathrm{d}x.$$

Agora note que como $\delta(t) = 1-\psi(t)$, tem-se pela igualdade anterior que

$$1-\psi(t) = 1-\psi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-\psi(t-x))(1-F_X(x))\mathrm{d}x,$$

ou seja,

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-\psi(t-x))(1-F_X(x))\mathrm{d}x.$$

Agora, pode-se escrever a expressão atrás como:

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F_X(x))\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)(1-F_X(x))\mathrm{d}x. \quad (4.4.4)$$

Pelo Lema 4.4.4 tem-se que $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$, e portanto, os dois primeiros termos da expressão anterior podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\psi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F_X(x))\mathrm{d}x &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F_X(x))\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{c}\Big[\mu - \int_0^t (1-F_X(x))\mathrm{d}x\Big]\\ &= \frac{\lambda}{c}\Big[\int_0^{+\infty} (1-F_X(x))\mathrm{d}x - \int_0^t (1-F_X(x))\mathrm{d}x\Big]\\ &= \frac{\lambda}{c}\int_t^{+\infty} (1-F_X(x))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

Ao substituir o resultado anterior em (4.4.4), obtém-se a expressão (4.4.3).

□

Lema 4.4.4. *Para o capital inicial nulo, isto é, $u = 0$, tem-se que*

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Demonstração

Por (4.4.2) e como $\delta(\cdot) \leq 1$, tem-se que

$$\delta(u) - \delta(0) \leq \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-F_X(x))\mathrm{d}x.$$

Logo

$$\lim_{u\to+\infty} \delta(u) - \delta(0) \leq \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} (1-F_X(x))\mathrm{d}x = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Mas $\lim_{u\to+\infty}\delta(u)=1$, donde resulta que

$$\delta(0)\geq 1-\frac{\lambda\mu}{c}.$$

Pela Desigualdade de Lundberg, Corolário 4.3.2, $\delta(u)\geq 1-e^{-Ru}$, logo por (4.4.2) tem-se que

$$\begin{aligned}\delta(u)-\delta(0)&\geq\frac{\lambda}{c}\int_0^u\left[1-e^{-R(u-x)}\right][1-F_X(x)]\mathrm{d}x\\&=\frac{\lambda}{c}\int_0^u[1-F_X(x)]\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{c}e^{-Ru}\int_0^u e^{Rx}[1-F_X(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Fazendo $u\to+\infty$, pela definição de coeficiente de ajustamento, tem-se que

$$1-\delta(0)\geq\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}[1-F_X(x)]\mathrm{d}x=\frac{\lambda\mu}{c},$$

ou seja

$$\delta(0)\leq 1-\frac{\lambda\mu}{c}.$$

□

Termina-se este capítulo com o cálculo da função geradora de momentos de $-\psi'(u)$.

Teorema 4.4.5. *Para $u\geq 0$*

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u=\frac{\theta}{1+\theta}\frac{m_X(r)-1}{1+(1+\theta)\mu r-m_X(r)}.$$

Demonstração

Pelo Teorema 4.4.1 tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u=&\frac{-\lambda}{c}\underbrace{\int_0^\infty e^{ru}\psi(u)\,\mathrm{d}u}_{I(r)}\\&+\underbrace{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{ru}\int_0^u\psi(u-x)\,\mathrm{d}F_X(x)\,du}_{II(r)}\\&+\underbrace{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{ru}(1-F_X(u))\,\mathrm{d}u}_{III(r)}.\end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned}
III(r) =& \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{ru}\int_u^\infty \mathrm{d}F_X(y)\,\mathrm{d}u = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Big(\int_0^y e^{ru}\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}F_X(y)\\
=& \frac{\lambda}{cr}\int_0^\infty (e^{ry}-1)\,\mathrm{d}F_X(y) = \frac{\lambda}{cr}(m_X(r)-1)\\
=& \frac{1}{(1+\theta)\mu r}(m_X(r)-1).
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo integração por partes e usando o facto de que $\lim_{u\to\infty}\psi(u)=0$, tem-se que

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \psi(0)+r\int_0^\infty e^{ru}\psi(u)\,\mathrm{d}u = \psi(0)+rI(r). \qquad (4.4.5)$$

Sendo assim, tem-se que $II(r)+III(r)=\psi(0)+(r+\lambda/c)I(r)$. Agora vai-se calcular $I(r)$. Pelo Teorema 4.4.3 tem-se que

$$I(r) = \underbrace{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{ru}\int_u^\infty (1-F_X(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u}_{A(r)} + \underbrace{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{ru}\Big(\int_0^u \psi(u-x)(1-F_X(x))\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}u}_{B(r)}.$$

Agora note que, aplicando o Teorema de Fubini duas vezes, tem-se que

$$\begin{aligned}
A(r) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Big(\int_0^x e^{ru}\,\mathrm{d}u\Big)(1-F_X(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \frac{e^{rx}-1}{r}(1-F_X(x))\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \frac{e^{rx}-1}{r}\Big(\int_x^\infty \mathrm{d}F_X(y)\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{cr}\int_0^\infty \Big(\int_0^y (e^{rx}-1)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}F_X(y)\\
&= \frac{\lambda}{cr}\int_0^\infty \left(\frac{e^{ry}-1}{r}-y\right)\mathrm{d}F_X(y) = \frac{\lambda}{cr}\Big(\frac{1}{r}(m_X(r)-1)-\mu\Big).
\end{aligned}$$

Daqui conclui-se que

$$I(r) = \frac{\lambda}{cr}\Big(\frac{1}{r}(m_X(r)-1)-\mu\Big)+B(r).$$

Finalmente calcula-se $B(r)$. Ora

$$\begin{aligned}
B(r) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{ru}\int_0^u \psi(u-x)(1-F_X(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F_X(x))\Big(\int_x^\infty e^{ru}\psi(u-x)\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F_X(x))\Big(\int_0^\infty e^{r(y+x)}\psi(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{rx}(1-F_X(x))\Big(\int_0^\infty e^{ry}\psi(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= I(r)\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{rx}\Big(\int_x^\infty \mathrm{d}F_X(x)\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= I(r)\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Big(\int_0^y e^{rx}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}F_X(y)\\
&= I(r)\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \frac{e^{ry}-1}{r}\,\mathrm{d}F_X(y)\\
&= I(r)\frac{\lambda}{cr}(m_X(r)-1).
\end{aligned}$$

Sendo assim, tem-se que

$$I(r) = \frac{\lambda}{cr}\Big(\frac{1}{r}(m_X(r)-1)-\mu\Big)+I(r)\frac{\lambda}{cr}(m_X(r)-1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
I(r) =&\frac{\lambda}{cr}\Big(\frac{1}{r}(m_X(r)-1)-\mu\Big)+I(r)\frac{\lambda}{cr}(m_X(r)-1)\\
=&\frac{\lambda}{cr}\frac{m_X(r)-1-\mu r}{cr-\lambda(m_X(r)-1)}.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo $I(r)$ em (4.4.5) e pelo Lema 4.4.4, obtém-se o resultado.

□

Agora vai-se usar o resultado do teorema anterior para se obter expressões exatas da probabilidade de ruína.

Exemplo 4.4.6. *(X com distribuição exponencial de parâmetro 1)*

Neste caso tem-se que $m_X(r) = \frac{1}{1-r}$, se $r < 1$. Logo,

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\frac{1}{1-r}-1}{1+(1+\theta)r-\frac{1}{1-r}} = \frac{\gamma\delta}{\gamma-r},$$

onde $\gamma = \theta/(1+\theta)$ *e* $\delta = 1/(1+\theta)$. *Logo, como*

$$\int_0^\infty e^{ru}\Big(\frac{-\psi'(u)}{\delta}\Big)\,\mathrm{d}u = \frac{\gamma}{\gamma - r},$$

a função geradora de momentos de uma exponencial de parâmetro γ *é* $\frac{\gamma}{\gamma-r}$, *resulta pela unicidade da função geradora de momentos, que* $\frac{-\psi'(u)}{\delta}$ *tem que coincidir com a função densidade de probabilidade da exponencial de parâmetro* γ, *ou seja,*

$$\frac{-\psi'(u)}{\delta} = \gamma e^{-\gamma u}.$$

Integrando ambos os membros da igualdade anterior entre x *e* ∞ *e usando o facto de que* $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = 0$, *obtém-se*

$$\frac{\psi(u)}{\delta} = -e^{-\gamma u},$$

donde resulta que $\psi(u) = -\delta e^{-\gamma u} = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta u}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta}e^{-Ru}$.

Exemplo 4.4.7. *(X com distribuição exponencial de parâmetro* β*)*

Lembre que neste caso tem-se que $m_X(r) = \frac{\beta}{\beta-r}$, *se* $r < \beta$. *Logo,*

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\frac{\beta}{\beta-r}-1}{1+(1+\theta)\frac{r}{\beta}-\frac{\beta}{\beta-r}} = \frac{\gamma\delta}{\gamma-r},$$

onde $\gamma = \beta\theta/(1+\theta)$ *e* $\delta = 1/(1+\theta)$ *e, então, como*

$$\int_0^\infty e^{ru}\Big(\frac{-\psi'(u)}{\delta}\Big)\,\mathrm{d}u = \frac{\gamma}{\gamma - r},$$

resulta que a função geradora de momentos de $-\psi'(u)/\delta$ *é igual a* $\frac{\gamma}{\gamma-r}$. *Ora, esta também é a função geradora de momentos de uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro* γ. *Logo, pela unicidade da função geradora de momentos, resulta que* $\frac{-\psi'(u)}{\delta}$ *tem que coincidir com a função densidade de probabilidade da exponencial de parâmetro* γ, *ou seja,*

$$\frac{-\psi'(u)}{\delta} = \gamma e^{-\gamma u}\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}.$$

Integrando ambos os membros da igualdade anterior entre x *e* ∞ *e usando o facto de que* $\lim_{u\to\infty}\psi(u)=0$*, obtém-se*

$$\frac{\psi(u)}{\delta}=-e^{-\gamma u}\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}},$$

donde resulta que $\psi(u)=\delta e^{-\gamma u}=\frac{1}{1+\theta}e^{(-\beta\theta u/(1+\theta))}$*, que coincide com o valor obtido anteriormente, tendo em conta que* $u\geq 0$*. Neste caso tem-se que* $m_X(r)=\frac{1}{1-r}$*, se* $r<1$*. Logo,*

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))\,\mathrm{d}u=\frac{\theta}{1+\theta}\frac{\frac{1}{1-r}-1}{1+(1+\theta)r-\frac{1}{1-r}}=\frac{\gamma\delta}{\gamma-r},$$

onde $\gamma=\theta/(1+\theta)$ *e* $\delta=1/(1+\theta)$*. Logo, como*

$$\int_0^\infty e^{ru}\Big(\frac{-\psi'(u)}{\delta}\Big)\,\mathrm{d}u=\frac{\gamma}{\gamma-r},$$

a função geradora de momentos de uma exponencial de parâmetro γ *é* $\frac{\gamma}{\gamma-r}$*, resulta pela unicidade da função geradora de momentos, que* $\frac{-\psi'(u)}{\delta}$ *tem que coincidir com a função densidade de probabilidade da exponencial de parâmetro* γ*, ou seja,*

$$\frac{-\psi'(u)}{\delta}=\gamma e^{-\gamma u}.$$

Integrando ambos os membros da igualdade anterior entre x *e* ∞ *e usando o facto de que* $\lim_{u\to\infty}\psi(u)=0$*, obtém-se*

$$\frac{\psi(u)}{\delta}=-e^{-\gamma u},$$

donde resulta que $\psi(u)=-\delta e^{-\gamma u}=\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta u}{1+\theta}}=\frac{1}{1+\theta}e^{-Ru}$.

Exemplo 4.4.8. *(X com distribuição que é mistura de exponenciais)*

Suponha que $\theta=0,4$ *e que* $f_X(x)=\frac{1}{2}3e^{-3x}+\frac{1}{2}7e^{-7x}$*. Vai-se encontrar* $\psi(u)$*. Note que* X *tem função densidade de probabilidade que é soma convexa da função densidade de probabilidade da exponencial de parâmetro* 3 *e da exponencial de parâmetro* 7*. Logo* $m_X(r)=\frac{1}{2}\frac{3}{3-r}+\frac{1}{2}\frac{7}{7-r}$*, se* $r<3$*. Daqui resulta que*

$$\int_0^\infty e^{ru}\Big(\frac{-\psi'(u)}{\delta}\Big)\,\mathrm{d}u=\frac{\delta}{1-r}+\frac{6\epsilon}{6-r},$$

onde $\delta=24/35$ *e* $\epsilon=1/35$*. Logo,* $\psi(u)=\delta e^{-1}+\epsilon e^{-6u}$.

4.5 Exercícios

1. Mostre que as equações para o coeficiente de ajustamento:

$$1+(1+\theta)\mu_1 r = m_X(r)$$

e

$$m_{c-S}(-r) = 1,$$

onde $\mu_1 = \mathbb{E}[X]$, θ representa o coeficiente de segurança e c o prémio, são equivalentes.

2. Considere um processo de risco, em que as indemnizações individuais têm distribuição Gama$(2,2)$, o valor do prémio é $c = 1.1$ e $\lambda = 1$. Determine o coeficiente de ajustamento R.

3. Sabendo que $e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2$ para $r > 0$ e $x > 0$, mostre que o coeficiente de ajustamento R satisfaz a desigualdade $R < 2\theta\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$, onde θ representa o coeficiente de segurança e $\mu_1 = \mathbb{E}[X]$, $\mu_2 = \mathbb{E}[X^2]$.

4. Considere um processo de risco, em que a função densidade de probabilidade das indemnizações é dada por $p(x) = \dfrac{1}{2}\left(3e^{-3x} + 7e^{-7x}\right)$, $x > 0$, e o coeficiente de segurança é $\theta = 0.4$.
Determine os valores de t para os quais $m_X(t)$ é finita e determine o coeficiente de ajustamento R.

5. Considere o modelo clássico de Crámer-Lundberg e denote por S_t o processo das indemnizações agregadas definido por $S_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i$, onde N_t designa o processo relativo ao número de indemnizações e para cada $i \geq 1$ denotamos por X_i o montante da i-ésima indemnização.

(a) Mostre que a esperança de S_t satisfaz a igualdade $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[X_1] = \lambda t$. Esta igualdade é conhecida como equação de Wald.

(b) Mostre que a função característica de S_t é dada por $\varphi_{S_t}(s) = m_{N_t}(\log(\varphi_{X_1}(s)))$, onde m_{N_t} é a função geradora de momentos de N_t e φ_{X_1} é a função característica de X_1.

(c) Mostre que a função geradora de momentos de S_t é dada por $m_{S_t}(s) = m_{N_t}(\log(m_{X_1}(s)))$, onde m_{N_t} é a função geradora de momentos de N_t e m_{X_1} é a função geradora de momentos de X_1.

6. No modelo clássico de Crámer-Lundberg definimos o coeficiente de ajustamento R como a solução positiva da equação:
$$\int_0^{\infty} e^{rx}(1 - F(x))\mathrm{d}x = \frac{c}{\lambda}.$$
Mostre que é equivalente definir o coeficiente de ajustamento como a solução positiva da equação $E[e^{r(S_t - ct)}] = 1$ ou também como a solução positiva da equação $rc = \lambda(m_{X_1}(r) - 1)$.

7. Seja $\{N_t\}_{t\geq 1}$ o processo relativo ao número de indemnizações definido por $N_t := \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}$. Sabendo que para cada $t > 0$, N_t é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λt e que o processo tem incrementos independentes, mostre que para $s < t$ o incremento $N_t - N_s$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda(t - s)$. $\{N_t\}_{t\geq 1}$ é um **processo de Poisson** a tempo contínuo.

8. Suponha que no modelo clássico de Crámer-Lundberg, a distribuição do montante de indemnizações particulares é Uniforme e que o montante de cada indemnização particular tem o valor máximo de θ unidades monetárias.

(a) Descreva a função de distribuição do montante das indemnizações particulares.

(b) Encontre o valor mínimo para c, i.e. o valor mínimo para a taxa constante a que chegam os pagamentos à seguradora.

(c) Determine o coeficiente de ajustamento.

9. Suponha que no modelo clássico de Crámer-Lundberg, a distribuição do montante de indemnizações particulares é exponencial com parâmetro $\theta > 0$.

   (a) Descreva a função de distribuição do montante das indemnizações particulares.

   (b) Encontre o valor mínimo para c, i.e. o valor mínimo para a taxa constante a que chegam os pagamentos à seguradora.

   (c) Determine o coeficiente de ajustamento.

   (d) Verifique que se θ cresce então a probabilidade de ruína decresce. Interprete o resultado.

10. Sabendo que $u = 10.000$, o montante das indemnizações particulares tem distribuição exponencial com parâmetro $\theta = 1/100$ e que o número médio de indemnizações que ocorrem até ao tempo t é $5t$, encontre c, R e obtenha a estimativa para $\psi(u)$. Analise a dependência de ψ em θ e em u.

11. Considere o modelo clássico de Crámer-Lundberg.

    (a) Mostre que $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[X_1]/\mathbb{E}[T_1]$. (Sugestão: use a equação de Wald e o facto de N_t ser um processo de Poisson de parâmetro λt.)

    (b) Supondo que a distribuição das indemnizações particulares é exponencial de parâmetro $\beta > 0$, determine o valor mínimo para os prémios, i.e. o valor mínimo para c; a função característica de S_t; o coeficiente de ajustamento e o valor médio do capital da seguradora no tempo t.

    (c) Determine o número mínimo de indemnizações que terão de ocorrer até ao tempo $t = 100$ para que o valor médio do capital da seguradora no tempo t seja negativo, sabendo que o capital inicial é de 10000 u.m., o valor do prémio é de 200 u.m. e o valor médio do montante das indemnizações particulares é de 500 u.m.

(d) Suponha que a distribuição das indemnizações particulares é exponencial de parâmetro $\beta > 0$. Determine o número mínimo de indemnizações que terão de ocorrer até ao tempo t para que o valor médio do capital da seguradora no tempo t seja negativo.

12. Na gerência de uma seguradora verificou-se que o montante das indemnizações particulares aquando da ocorrência de um sinistro, depende da gravidade do sinistro e o montante a indemnizar ao segurado pode ser de 100 u.m., 200 u.m., 500 u.m. ou 1000 u.m. Quantos mais danos são causados ao segurado, maior é o valor da indemnização. A probabilidade de indemnizar o segurado em 100 u.m. é três vezes a probabilidade de indemnizar um segurado em 1000 u.m. e a probabilidade de indemnizar um segurado em 500 u.m. é duas vezes a probabilidade de indemnizar o segurado em 200 u.m.

    (a) Determine a função de distribuição do montante de indemnizações particulares sabendo que o valor médio das indemizações particulares é de 370 u.m.

    (b) Verificou-se que o número médio de indemnizações que ocorrem até ao tempo t é $t/2$. Determine o valor médio do montante das indemnizações agregadas que ocorreram até ao tempo t. Justifique.

    (c) Determine o valor mínimo para o valor dos prémios, i.e o valor mínimo de c.

    (d) Sabendo que o capital inicial é de 10.000 u.m. e que c=200 u.m., determine o valor médio do capital da seguradora ao fim de $t = 1000$.

    (e) Determine o número mínimo de indemnizações que terão de ocorrer até $t = 100$, para que o valor médio do capital da seguradora seja negativo, supondo que o valor do prémio é de 200 u.m. e o capital inicial é de

(e1) 20000 u.m.

(e2) 10000 u.m.

(e3) 5000 u.m.

Interprete o resultado.

Capítulo 5

Anexo

5.1 Variável aleatória e sua função de distribuição

Nesta secção vamos introduzir o conceito de variável aleatória, e para tal precisamos de definir espaço amostral, σ-álgebra e medida de probabilidade.

Vamos representar pela letra Ω um espaço abstrato que será o espaço amostral cujos elementos iremos denotar por ω.

Definição 5.1.1. (σ-álgebra)

Uma colecção não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω diz-se uma σ-álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F}$, *então* $A^c \in \mathcal{F}$;
3. $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, *então* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$.

É fácil verificar que dado um espaço amostral Ω, o conjunto $\mathcal{F} = \{, \Omega\}$ é uma σ-álgebra, chamada de σ-álgebra trivial. Por outro lado, se $\mathcal{F}$ é o conjunto das partes de Ω, isto é, $\mathcal{F}$ é o conjunto que contém todos os subconjuntos de Ω, então é fácil verificar que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra chamada de σ-álgebra total.

Exemplo 5.1.2. *Um exemplo simples consiste em considerar o espaço amostral $\Omega = \{a, b\}$. Então, o conjunto definido por $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ é uma σ-álgebra. Este conjunto é o conjunto das partes de Ω.*

Exemplo 5.1.3. *A σ-álgebra em $\mathbb{R}$ formada pela colecção de intervalos da forma $(a, b]$, onde $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$, diz-se a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$. Esta σ-álgebra vai ser denotada por $\mathcal{B}$.*

Definição 5.1.4. (Medida de Probabilidade)

Uma medida de probabilidade $P(\cdot)$ definida numa σ-álgebra $\mathcal{F}$, é uma função $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *$\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$ (positividade);*
2. *Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma colecção de subconjuntos de $\mathcal{F}$, disjuntos 2 a 2, ou seja, $(\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset)$, então*
$$P\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(A_j) \quad (\sigma\text{-aditividade});$$
3. *$P(\Omega) = 1$.*

Um exercício para o leitor, consiste em verificar que se $P(\cdot)$ é uma medida de probabilidade, de acordo com a definição anterior, então $P(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) \leq 1$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$;
4. $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$;
5. Se $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ então $P(A) = P(B) - P(B|A) \leq P(B)$, onde $B|A := B \cap A^c$;

6. Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, $A_j \uparrow A$, isto é, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, então
$$\lim_{j\to+\infty} P(A_j) = P(A);$$
7. **(Desigualdade de Boole)**

   $\forall A_j \in \mathcal{F}$, $P\big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\big) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} P(A_j)$.

Definição 5.1.5. (Variável aleatória)

Uma variável aleatória é uma função $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *que satisfaz a seguinte propriedade de mensurabilidade:*

$$\forall B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega :\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Ou seja, X é uma função mensurável com respeito à σ-álgebra $\mathcal{F}$. Iremos denotar esta propriedade por $X \in \mathcal{F}$.

A definição de variável aleatória é muito mais geral, mas neste texto vamos sempre supôr que o contradomínio das variáveis aleatórias está contido em $\mathbb{R}$.

Antes de prosseguir vamos introduzir a definição de função de distribuição.

Definição 5.1.6. (Função de distribuição)

Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de distribuição se:

1. *$F(\cdot)$ é crescente e contínua à direita;*
2. *$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;*
3. *$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.*

O próximo resultado diz-nos que toda a medida de probabilidade define unicamente uma função de distribuição.

Lema 5.1.7. *Toda a medida de probabilidade $\mu(\cdot)$ definida em $\mathcal{B}$ determina uma função de distribuição $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ através da correspondência*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mu\big((-\infty, x]\big) = F(x).$$

O resultado atrás continua a ser verdadeiro, se em vez de tomarmos $x \in \mathbb{R}$ considerarmos $x \in \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ como por exemplo o conjuntos dos números racionais.

O recíproco do teorema anterior também é verdadeiro e isso é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 5.1.8. *Cada função de distribuição $F(\cdot)$ determina uma medida de probabilidade $\mu(\cdot)$ definida em $\mathcal{B}$ através da relação $F(b) - F(a) = \mu((a, b])$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

Estes resultados não serão apresentados mas poderão ser consultados em qualquer livro básico de teoria da medida ou de teoria da probabilidade.

Resumindo os dois resultados num só teorema, resulta o seguinte:

Teorema 5.1.9. *Dada uma medida de probabilidade $\mu(\cdot)$ definida em $\mathcal{B}$, existe uma só função de distribuição $F(\cdot)$ que satisfaz $\mu\big((-\infty, x]\big) = F(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, dada uma função de distribuição $F(\cdot)$, existe uma só medida de probabilidade $\mu(\cdot)$ que satisfaz $\mu\big((-\infty, x]\big) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$.*

Teorema 5.1.10. *Cada variável aleatória X definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, induz um espaço de probabilidade $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_X)$, através da seguinte correspondência:*

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \mu_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right).$$

Para fixar notação notamos que

$$P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\right) = P(X \in B).$$

Definição 5.1.11. (Medida induzida)

A medida obtida no teorema anterior é medida induzida pela variável aleatória X no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Usa-se a notação $\mu_X(\cdot) = P(X \in \cdot)$. Esta medida é também chamada de push-forward da medida $P(\cdot)$.

Ao longo do texto iremos chamar de medida de distribuição de probabilidade ou medida de distribuição de X à medida $\mu_X(\cdot) = P \circ X^{-1}(\cdot)$. A função de distribuição de X vai ser denotada por $F_X(\cdot)$ e é definida por

$$F_X(x) = \mu_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(X^{-1}(-\infty, x]), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uma questão natural que se segue é a seguinte. Dada uma função de distribuição F, existe alguma variável aleatória X cuaj função de distribuição seja F? A resposta é afirmativa e basta tomar $X(\omega) = \omega$ *** adicionar detallhes.

Por outro lado, existem variáveis aleatórias diferentes e que têm a mesma função de distribuição. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 5.1.12. *Considere o espaço de probabilidade* $([0,1], \mathcal{F}, m)$*, onde* $\mathcal{F}$ *é o traço da* σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}$ *em* $[0,1]$ *e* m *representa a medida de Lebesgue em* $[0,1]$*. Sejam* X_1, X_2 *ambas definidas no espaço de probabilidade* $([0,1], \mathcal{F}, m)$*, com* $X_1(\omega) = \omega$ *e* $X_2(\omega) = 1 - \omega$*. É um exercício fácil para o leitor verificar que a função de distribuição de* X_1 *e* X_2 *são iguais.*

Este exemplo motiva a seguinte definição.

Definição 5.1.13. (Variáveis aleatórias identicamente distribuídas)

Duas variáveis aleatórias que têm a mesma medida de distribuição $\mu(\cdot)$ *ou a mesma função de distribuição* $F(\cdot)$ *dizem-se identicamente distribuídas.*

Uma questão natural que podemos colocar é de que tipo podem ser as funções de distribuição. Já sabemos que têm que satisfazer as condições impostas acima, mas podemo-nos questionar acerca da caracterização dessas funções. Isso nos leva ao tema da próxima secção.

5.2 Tipos de variáveis aleatórias

Uma variável aleatória pode decompor-se num dos seguintes tipos: discreta, absolutamente contínua ou singular.

Definição 5.2.1. (Variável aleatória discreta)

Uma variável aleatória X diz-se discreta, se toma um número finito ou numerável de valores, ou seja, existe um conjunto $I = \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in I, \forall \omega \in \Omega$.

A função $p : I \to [0,1]$ definida por

$$p(x_i) = P(X = x_i),$$

para $i \geq 1$, diz-se a função de probabilidade ou a função massa de probabilidade de X.

A função de distribuição de X é dada em $x \in \mathbb{R}$ por

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{j} p(x_i),$$

onde j é tal que $x_j \leq x < x_{j+1}$.

Seguem abaixo alguns exemplos clássicos de variáveis aleatórias discretas.

1. X tem distribuição Bernoulli com parâmetro p se tem função de probabililidade dada por $p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x \in \{0,1\}$,$0 < p < 1$

2. X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p se tem função de probabilililidade dada por $p(x) = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$, $x \in \{1,2,\ldots,n\}$, $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$

3. X tem distribuição Poisson de parâmetro θ se tem função de probabilidade dada por $p(x) = e^{-\theta}\dfrac{\theta^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,$\theta > 0$

4. X tem distribuição Geométrica(p) se tem função de probabilidade dada por $p(x) = p(1-p)^x$, $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,$0 < p < 1$

Agora introduzimos outro tipo de variável aleatória.

Definição 5.2.2. (Variável aleatória absolutamente contínua)

Uma variável aleatória X diz-se absolutamente contínua se existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

- *$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ (positividade);*
- *$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, onde $F_X(\cdot)$ é a função de distribuição de X.*

A função $f(\cdot)$ diz-se a função densidade de probabilidade de X. Neste caso, a função de distribuição $F_X(\cdot)$ diz-se uma função de distribuição absolutamente contínua.

Deixamos ao leitor verificar, que uma função $F_X(\cdot)$ como definida cima satisfaz as propriedades da Definição 5.1.6.

Abaixo apresentam-se alguns exemplos de variáveis aleatórias absolutamente contínuas.

1. X tem distribuição Uniforme em $[a,b]$ se tem função densidade dada por $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
2. X tem distribuição Exponencial de parâmetro β se tem função densidade dada por $f(x) = \beta e^{-\beta x}\mathbf{1}_{[0,+\infty]}(x), \beta > 0$
3. X tem distribuição Gamma de parâmetros α e β se tem função densidade dada por $f(x) = \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$, $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$
4. X tem distribuição Normal de parâmetros μ e σ se tem função de distribuição dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $x, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

Existe ainda um outro tipo de variável aleatória que é a variável aleatória singular.

Definição 5.2.3. (Variável aleatória singular)

Uma variável aleatória X diz-se singular se a sua função de distribuição $F_X(\cdot)$ é não nula $F_X(\cdot)(\cdot) \neq 0$, $F_X(\cdot)$ é uma função contínua, mas a sua derivada (que existe em quase todo o ponto - por um resultado de medida) é nula, ou seja, $F'_X(\cdot) = 0$ em quase todo o ponto.

Os exemplos que veremos serão apenas de variáveis aleatórias discretas ou absolutamente contínuas.

5.3 Esperança matemática

5.3.1 Exercícios

Exercício 1:

Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por $f(x) = (1+x)^{-2}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$.

Seja $Y = \max(X, c)$, onde c é uma constante $c > 0$.

(a) Mostre que f é uma função densidade de probabilidade.

(b) Determine a função de distribuição de X e Y. Justifique que F_X (a função de distribuição de X) é uma função de distribuição.

(c) Decomponha a função de distribuição de Y nas suas partes discreta, absolutamente contínua e singular.

Exercício 2:

Seja X uma variável aleatória simétrica em torno de um ponto b definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suponha que X toma os valores a, b e $2b - a$, com $a < 0$ e $b > 0$. Mostre que $E[X] = b$. Sabendo que $E[X] = 1$, $a = -1$ e $Var(X) = 3$, determine a função de distribuição de X e a medida induzida μ_X. Calcule $\mu_X((-\infty, -1])$, $\mu_X((-\infty, 3/2])$ e $\mu_X(\{1\})$.

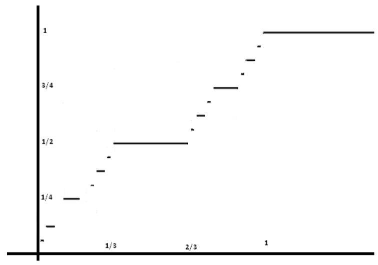
Exercício 3:

Seja X uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com distribuição de Cantor:

(a) Descreva a construção da sua função de distribuição F_X.

(b) Justifique que X é uma variável aleatória singular.

(c) Calcule $E[X]$. Justifique.



(d) Calcule $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$.

5.4 Indepêndência estocástica

Exercício 1:

Suponhamos que X e Y são v.a. identicamente distribuídas com distribuição simétrica em torno de zero e definidas num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com distribuição conjunta dada por:

$X \setminus Y$	-1	0	$\dots$
-1	$\dots$	0	$\dots$
0	0	$\dots$	0
$\dots$	θ	0	θ

(a) Sabendo que $P(X = -1) = 2/5$, complete a tabela.

(b) Calcule $E[X]$, $E[Y]$ e Var(X).

(c) As variáveis X e Y são independentes? Justifique.

(d) Encontre a função de probabilidade das variáveis aleatórias $X+Y$ e XY.

Justifique se $X+Y$ e XY são ou não v.a. simétricas em torno de zero.

(e) Represente graficamente a função de distribuição da v.a. $X+Y$.

(f) Explicite a medida de distribuição μ_{X+Y}.

(g) Calcule $\mu_{X+Y}(\{0\})$ e $\mu_{X+Y}((-\infty,0])$.

5.5 Convergência de sucessões de variáveis aleatórias

Exercício 1:

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que para cada $n \geq 1$ se tem que

$$P(X_n = e^n) = \frac{1}{n+1} \quad e \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Analise a convergência de $(X_n)_{n\geq 1}$ para a v.a. $X = 0$ no caso de

(a) convergência em probabilidade.

(b) convergência em L^p, para $p > 0$.

(c) convergência em quase certa.

(d) convergência em distribuição.

Exercício 4:

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que X_1 tem distribuição exponencial de parâmetro 1. Para cada $n \geq 1$ seja $Y_n = X_n/\log(n)$. Analise a convergência de $(Y_n)_{n\geq 1}$ para a variável aleatória $Y = 0$ no caso de

(a) convergência em probabilidade.

(b) convergência em L^1.

(c) convergência quase certa.

(d) convergência em distribuição.

5.6 Função Geradora de probabilidade

5.7 Função Geradora de cumulantes

5.8 Função Geradora de momentos

Seja X uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A função geradora de momentos de X, que iremos denotar por M_X é definida em $t \in \mathbb{R}$ por

$$\varphi_X(t) = E[e^{tX}].$$

5.9 Função Característica

Seja X uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A função característica de X, que iremos denotar por φ_X é definida em $t \in \mathbb{R}$ por

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}].$$

5.9.1 Exercícios

Exercício 1:

Prove ou apresente um contra-exemplo da seguinte afirmação

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X, \quad fracamente \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X, \quad em \quad probabilidade.$$

Exercício 2:

Usando o Teorema de Scheffé prove que se $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, com

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2, \quad e \quad \mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu,$$

então

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} N(\mu, \sigma^2), \quad fracamente.$$

Exercício 3:

Encontre a função característica das seguintes variáveis aleatórias discretas e explicite a distribuição de X.

(a) X tal que $P(X=a)=1$ e $P(X \neq a)=0$.

(b) X tal que $P(X=1)=1/2$ e $P(X=-1)=1/2$.

(c) X com distribuição de Bernoulli de parâmetro p.

(d) X com distribuição Binomial de parâmetros n e p, $B(n,p)$.

(e) X com distribuição Geométrica de parâmetro p, $Geo(p)$.

(f) X com distribuição de Poisson de parâmetro λ.

Exercício 4:

Encontre a função característica das seguintes variáveis aleatórias absolutamente contínuas:

(a) X com distribuição exponencial de parâmetro λ.

(b) X com distribuição Uniforme em $[-a,a]$, com $a>0$.

(c) X com distribuição triangular em $[-a,a]$, com $a>0$.

(d) X com distribuição $N(\mu,\sigma^2)$.

Exercício 5:

Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias independentes entao $\varphi_{X+Y}=\varphi_X\varphi_Y$.

Exercício 6:

Mostre que se φ é uma função característica então $|\varphi|^2$ também o é.

Exercício 7:

Seja φ uma função característica. Mostre que $\psi(t)=e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$ com $\lambda>0$ também é uma função característica.

Sugestão: Sejam $N, X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias independentes com $N \sim P(\lambda)$ e $(X_n)_{n\geq 1}$ identicamente distribuídas com $\varphi_{X_n}=\varphi$ para todo $n\geq 1$. Seja $Y := S_N$, onde $S_n = X_1+\cdots+X_n$. N é um tempo de parada. Então $\varphi_Y=\psi$. A distribuição de Y diz-se a distribuição composta de Poisson.

Exercício 8:

Seja φ_X a função característica de uma v.a. X com distribuição Binomial com parâmetros n e p. Encontre φ_X e $E[X]$ e verifique que $i^{-1}\partial_t\varphi_X(0) = E[X] = np$.

Exercício 9:

(a) Calcule a função característica de uma v.a. com distribuição Uniforme $\mathcal{U}[-a,a]$.

(b) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a. com distribuição Uniforme $\mathcal{U}[-n,n]$. Para cada $n \geq 1$, seja φ_n a função característica da v.a. X_n. Encontre φ tal que $\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e verifique se φ é ou não uma função característica.

Exercício 10:

(a) Mostre que se $Y := aX + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ então $\varphi_Y(t) := e^{itb}\varphi_X(at)$.

(b) A função $\varphi(t) := \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$ é uma função característica? Justifique.

(c) A função $\varphi(t) := t\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(t)$ é uma função característica? Justifique.

(d) Mostre que X é uma variável aleatória simétrica se e só se a sua função característica φ_X, toma valores em $\mathbb{R}$.

(e) Seja $\varphi(t) = \frac{1+\cos(3t)}{2}$. Encontre X tal que φ é a sua função característica.

Exercício 11:

(a) Usando funções característica mostre que se X e Y são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ então $X + Y \sim \mathcal{N}(0,2)$.

Note que se $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ então a sua função característica é dada por $\varphi_X(t) := e^{it\mu - t^2\sigma^2/2}$.

(b) Obtenha o resultado anterior usando a convolução. Justifique.

(c) Calcule o momento de ordem 3 da variável aleatória $X+Y$, i.e. calcule $E[(X+Y)^3]$. Sugestão: use funções característica.

(d) Sejam $X_1,\cdots,X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e tal que $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Usando funções característica, mostre que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, em **probabilidade**, onde $S_n := X_1+\cdots+X_n$.

Exercício 12:

Sejam $X_1,\cdots,X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, respetivamente, onde $\lambda_i > 0$, para todo $i \geq 1$.

(a) Verifique que $E[X_1] = \lambda_1$.

(b) Calcule a função característica φ_{X_1} de X_1.

(c) Verifique que $d_t \log(\varphi_{X_1}(t)) = \lambda_1 i e^{it}$ e conclua que $i^{-1}\varphi'_{X_1}(0) = E[X_1]$.

(d) Calcule a função característica de $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

Exercício 13:

(a) Seja X uma variável aleatória simétrica em torno de um ponto b definida num espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Suponha que X toma os valores a, b e $2b-a$, com $a<0$ e $b>0$. Mostre que $E[X]=b$. Sabendo que $E[X]=1$, $a=-1$ e $Var(X)=3$, determine a função de distribuição de X e a medida induzida μ_X. Calcule $\mu_X((-\infty,-1])$, $\mu_X((-\infty,3/2])$ e $\mu_X(\{1\})$.

(b) Seja X uma variável aleatória constante e seja φ_X a sua função característica.

Mostre que $|\varphi_X(t)|^2 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Seja X uma variável aleatória independente de si mesma. Mostre que X é uma variável aleatória constante com probabilidade 1.

(d) Seja X uma variável aleatória simétrica em torno de 0 que toma apenas dois valores θ e $-\theta$, onde $\theta > 0$. Mostre que não existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ onde φ_X denota a função característica de X. Mostre que $\varphi''_X(0) = -\theta^2$. Conclua que $Var(X) = \theta^2$.

Exercício 14:

(a) Seja X uma v.a. simétrica que toma os valores $a \neq b \neq c$.

Sabendo que $P(X = 0) = 1/5$, obtenha a função de distribuição de X e calcule $E[X]$. Obtenha os resultados apenas em função de $a \neq 0$.

(b) Calcule φ_X i.e. a função característica de X.

(c) Verifique que não existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) Calcule $\partial_t \varphi_X(t)$ e verifique que $i^{-1}\varphi'_X(0) = E[X]$.

(e) Encontre a tal que $\varphi''_X(0) = -1$. Conclua que $Var(X) = 1$.

Exercício 15:

(a) Represente a função $\varphi(t) := \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$. É uma função característica? Justifique.

(b) Represente a função $\varphi(t) := t\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(t)$. É uma função característica? Justifique.

(c) Justifique se $\varphi(t) := \frac{e^{ita}+1}{2}$ é ou não a função característica de uma v.a. simétrica?

Explicite a v.a. cuja função característica é dada por φ.

Exercício 16:

Sejam X e Y v.a. independentes e identicamente distribuídas, tais que a medida induzida por X é dada por $\mu_X := p\delta_{\{1\}} + q\delta_{\{-1\}}$ onde $p + q = 1$.

(a) Determine a função característica de X.

(b) Mostre que X é simétrica se e só se $p = 1/2$.

(c) Considere $p = 1/2$. Seja φ_{X+Y} a função característica da v.a. $X+Y$. Verifique que $\varphi_{X+Y}(t) := cos^2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) Usando a convolução, determine a função de distribuição da v.a.

$X+Y$. Mostre que $X+Y$ é simétrica se e só se $p=1/2$. Neste caso, calcule novamente a função característica da v.a. $X+Y$ e conclua que

$$cos^2(t) := \frac{1+cos(2t)}{2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 17:

Sejam X e Y v.a. independentes e identicamente distribuídas com $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(a) Calcule a função característica de X.

(b) Usando funções característica e a convolução, mostre que $X+Y \sim \mathcal{N}(0,2)$.

(c) Mostre, usando funções característica, que se $Z := \sigma X + \mu$ então $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(d) Seja φ_Z a função característica de Z. Calcule $|\varphi_Z|^2$ e verifique que $|\varphi_Z|^2 \leq 1$. A v.a. Z é simétrica?

(e) Mostre que $i^{-1}\varphi'_Z(0) := \mu$ e que $-\varphi''_Z(0) = \mu^2 + \sigma^2$. Conclua que $Var(Z) = \sigma^2$.

(f) Sejam $X_1, \cdots, X_n$ v.a. independentes e identicamente distribuídas e tal que $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Mostre que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, em **probabilidade**, onde $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

Exercício 18:

(a) Seja X uma v.a. com distribuição exponencial de parâmetro $a > 0$. Calcule φ_X i.e. a função característica de X.

(b) Calcule $\varphi'_X(t)$ e verifique que $i^{-1}\varphi'_X(0) = E[X]$. Justifique.

(c) Encontre a tal que $\varphi''_X(0) = -1/8$. Calcule $Var(X)$.

Exercício 19:

(a) Encontre a v.a. X tal que $\varphi(t) := cos(t)$ é a sua função característica. Justifique.

(b) Prove que uma v.a. simétrica tem todos os momentos de ordem impar nulos. Sugestão: use funções característica.

(c) Represente a função $\varphi(t) := \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$. É uma função característica? Justifique.

(d) Justifique se $\varphi(t) := \frac{e^{it}+1}{2}$ é ou não a função característica de uma v.a. simétrica? Explicite a v.a. cuja função característica é dada por φ. Calcule $|\varphi|^2$.

(e) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a. com distribuição Uniforme $\mathcal{U}[-n,n]$. Para cada $n \geq 1$, seja φ_n a função característica da v.a. X_n. Calcule φ_n. Verifique se a função $\varphi(t) := \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)$ é ou não uma função característica.

Exercício 20:

Usando funções característica, mostre que se

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X, \quad fracamente \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(X), \quad fracamente,$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Exercício 21:

Usando funções característica prove o Teorema de Slutsky:

Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória. Suponha que

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X, \quad fracamente \quad e \quad Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c, \quad em \quad probabilidade,$$

onde c é uma constante. Então

(a)

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X + c, \quad fracamente.$$

(b)

$$X_n - Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X - c, \quad fracamente.$$

(c)

$$X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Xc, \quad fracamente.$$

(d) se $c \neq 0$ e $P(Y_n \neq 0) = 1$, para todo $n \geq 1$, então $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{X}{c}$, fracamente.

Exercício 22:

Mostre que se X é uma v.a. simétrica então a sua função característica toma valores em $\mathbb{R}$.

Exercício 23:

Prove, usando funções característica que se $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E(X_1) = \mu < \infty$, então $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu$, em probabilidade, onde $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

Exercício 24:

(a) Mostre usando funções característica que se $X \sim B(m,p)$ e $Y \sim B(n,p)$, e se X e Y são independentes então $X+Y \sim B(n+m,p)$.

(b) Mostre que se X tem distribuição Cauchy padrão, então $\varphi_{2X} = (\varphi_X)^2$. Use (sem provar) que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\, dx = e^{-|t|}.$$

(c) É verdade que se X e Y são variáveis aleatórias independentes então $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$. E o recíproco também é verdade? Prove ou apresente um contra-exemplo.

Exercício 25:

(a) Seja $\varphi(t) = \cos(at)$ com $a > 0$. Prove que φ é uma função característica.

(b) Seja $\varphi(t) = \cos^2(t)$. Encontre X tal que φ é a sua função característica.

Exercício 26:

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$. Se $X+Y$ e $X-Y$ são independentes então $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

5.10 Soma de variáveis aleatórias

Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade p_1 e p_2 respectivamente.

Definição 5.10.1. *(Convolução entre funções de probabilidade)*

A convolução entre duas funções de probabilidade p_1 e p_2 é a função de probabilidade dada por

$$p(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_1(x-k)p_2(k).$$

Lema 5.10.2. *Se X e Y são variáveis aleatórias discretas e independentes, então a variável aleatória $X+Y$ tem função de probabilidade dada por $p(\cdot)$ definida acima, ou seja a função de probabilidade de $X+Y$ é a convolução da função de probabilidade de X com a função de probabilidade de Y.*

No caso das variáveis aleatórias serem absolutamente contínuas com densidades f_1 e f_2 pode-se definir a convolução entre as suas densidades da seguinte forma:

Definição 5.10.3. *(Convolução entre densidades)*

A convolução entre duas funções densidade de probabilidade f_1 e f_2 é a função densidade dada por

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Lema 5.10.4. *Se X e Y são variáveis aleatórias absolutamente contínuas e independentes então a variável aleatória $X+Y$ tem função densidade dada por $f(\cdot)$ definida acima, ou seja a função densidade de $X+Y$ é a convolução da função densidade de X com a função densidade de Y.*

5.10.1 Exercícios

Exercício 1: Encontre a distribuição da variável aleatória $X+Y+Z$, sabendo que X,Y e Z são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e X tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p, i.e. a medida induzida por X é $\mu_X := p\delta_{\{1\}} + (1-p)\delta_{\{0\}}$.

Resolva de duas formas: usando a convolução e funções característica.

Exercício 2:

Encontre a distribuição da variável aleatória $X+Y$, sabendo que X e Y são variáveis aleatórias independentes e X tem distribuição de Poisson de parâmetro λ_1 e Y tem distribuição de Poisson de parâmetro λ_2.

Resolva de duas formas: usando a convolução e funções característica.

Exercício 3:

(a) Usando funções característica mostre que se X e Y são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ então $X+Y \sim \mathcal{N}(0,2)$.

Note que se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então a sua função característica é dada por $\varphi_X(t) := e^{it\mu - t^2\sigma^2/2}$.

(b) Obtenha o resultado anterior usando a convolução. Justifique.

5.11 Martingais

Nesta secção vai-se introduzir o conceito de martingal. Para facilitar a compreensão dos conceitos, vamos começar por definir a noção de martingal em tempo discreto. Para introduzirmos a definição de martingal, vamos precisar de introduzir a noção de filtro que está relacionada com a noção quantidad crescente de informação. A ideia por trás da definição de filtro resulta da seguinte observação. Suponhamos que estamos interessados em analisar a evolução de um certo fenómeno que evolui com o tempo. Assumindo que possuimos a informação sobre a sua evolução até ao tempo presente, pretendemos saber como será a evolução futura. Para representarmos formalmente a noção da quantidade de informação, assumiremos que está descrita por um conjunto de sigma-álgebras que vai armazenando a informação com o evoluir do tempo. Daqui nasce a noção de filtro que é a seguinte:

Definição 5.11.1. *(Filtro)*

Seja $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de sigma-algebras. Dizemos que* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *é um filtro se para cada* $n\geq 1$ *se tem que*

$$\mathcal{F}_n \in \mathcal{F}_{n+1}$$

ou seja, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência crescente de sigma-algebras.*

Até aqui temos codificada a quantidade de informação que vamos adquirindo à medida que o tempo n evolui. A quantidade que estamos interessados em analisar no tempo n vai ser denotada pela letra X_n e será uma variável aleatória. A noção de martingal é a seguinte:

Definição 5.11.2. *(Martingal)*

Uma sequência de v.a. e de sigma-algebras $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *diz-se um martingal (respetivamente submartingal ou supermartingal) se e só se para cada* $n\geq 1$ *se tem que*

(a) $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *é um filtro e* $X_n \in \mathcal{F}_n$.

(b) X_n *é integrável.*

(c) $X_n = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ *(respetivamente* $\leq$ *ou* $\geq$*).*

5.11.1 Exercícios

Exercício 1:

Mostre que:

(a) se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $E[X_n] = 0$ para todo $n \geq 1$, então $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ onde $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ é um martingal.

(b) se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $E[X_n] = 1$ para todo $n \geq 1$, então $(\tilde{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ onde $\tilde{X}_n = \prod_{j=1}^n X_j$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$, é um martingal.

(c) dada uma variável aleatória X integrável, i.e. com $E[|X_n|] < +\infty$ e um conjunto de σ-algebras $\mathcal{F}_0 \subseteqq \mathcal{F}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathcal{F}_n$, então $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ onde $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$ é um martingal.

Exercício 2:

Mostre que:

(a) se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias integráveis não negativas, então $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ onde $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ é um submartingal.

(b) se $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um martingal e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função convexa com $E[|g(X_n)|] < +\infty$ para todo $n \geq 1$, então $(g(X_n), \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um submartingal.

Exercício 3:

Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $P(X_1 = 1) = p$ e $P(X_1 = -1) = q$ com $p + q = 1$. Se $p \neq q$, mostre que se $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$, então

(a) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um martingal, onde $Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$,

(b) $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um martingal, onde $Z_n = S_n - n(p-q)$,

Exercício 4:

Mostre que se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E(X_n) = 0$ e $Var(X_n) = \sigma^2$ para todo $n \geq 1$, então $(\mathcal{W}_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um martingal, onde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ e

(a)

$$\mathcal{W}_n = \Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)^2 - n\sigma^2.$$

(b)

$$\mathcal{W}_n = \frac{e^{\lambda \sum_{j=1}^n X_j}}{(E[e^{\lambda X_1}])^n}.$$

Exercício 5:

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas que tomam valores num conjunto finito $\mathcal{I}$. Para cada $y \in \mathcal{I}$, seja $f_0(y) = P(X_1 = y)$ e seja $f_1 : \mathcal{I} \to [0,1]$ uma função não negativa tal que $\sum_{y\in\mathcal{I}} f_1(y) = 1$. Mostre que $(\mathcal{W}_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um martingal, onde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ e

$$\mathcal{W}_n = \frac{f_1(X_1)\cdots f_1(X_n)}{f_0(X_1)\cdots f_0(X_n)}.$$

As variáveis $\mathcal{W}_n$ são conhecidas como likelihood ratios.

Exercício 6:

(a) Mostre que se $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um martingal, então para todo $n < m$ se tem que $X_n = E[X_m|\mathcal{F}_n]$.

(b) Conclua que $E[X_1] = E[X_n]$ para todo $n \geq 1$.

(c) Para cada $n \geq 2$ seja $Y_n = X_n - X_{n-1}$ e tome-se $Y_1 = X_1$. Chama-se a Y_n o incremento do martingal. Mostre que $E[Y_n] = 0$ para todo $n \geq 0$.

(d) Assuma que $E[X_n^2] < +\infty$ para todo $n \geq 1$. Prove que os incrementos do martingal são não correlacionados.

(e) Mostre que $Var(X_n) = \sum_{j=1}^{n} Var(Y_j)$.

Exercício 7:

Sejam $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ dois martingais com $X_1 = Y_1 = 0$. Mostre que

$$E[X_nY_n] = \sum_{k=2}^{n} E[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})].$$

Exercício 8:

Seja $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ um martingal (ou submartingal) e seja τ um tempo de Markov com respeito a $\mathcal{F}_n$. Então o processo de parada definido por $(X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ também é um martingal (ou submartingal).

Bibliografia

- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D and Nesbitt, C.: Actuarial Mathematics, 2nd ed., Schaumburg, The Society of Actuaries, 1997.
- Centeno, M.: Teoria do Risco na Atividade Seguradora, Oeiras, Celta editora, 2003.
- Chung, K.: A Course in Probability Theory, 2nd ed., New York, Academic Press, 1974.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, R.: Modern Actuarial Risk Theory, 2nd ed., Springer Verlag, 2009.
- Karlin, S. and Taylor, H.: A first course in stochastic processes. Academic Press, 1975.
- Reis, A.: Teoria da Ruína, ISEG, Dezembro de 2001.
- Shiryayev, A. N.: Probability, New York, Springer Verlag, 1984.

Agradecimentos

As autoras agradecem o Centro de Matemática da Universidade do Minho pelo apoio através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto PEstOE/MAT/UI0013/2014 .