Cadeias de Markov

Leonor Botelho 79178
Catarina Loureiro 80868
João Góis 81208

Instituto Superior Técnico

December 19, 2017

Índice

1. Introdução
2. Cadeias de Markov
   - Falência do Jogador
   - Colecionar Cupões
   - Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest
   - Modelo da Urna de Pólya
   - Cadeias de Nascimento e Morte
   - Passeios Aleatórios em Grupos
     - Gerar conjuntos, irredutibilidade, grafos de Cayley, e reversibilidade
     - Cadeias de Markov Transitivas
   - Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$ e Princípio da Reflexão
3. Referências

Cadeias de Markov

Definição 1: Cadeia de Markov em tempo discreto

Uma cadeia de Markov finita é um processo que se move entre os elementos de um conjunto finito Ω da seguinte forma: quando em $x \in \Omega$, a próxima posição é escolhida de acordo com uma distribuição de probabilidade fixa $P(x, \cdot)$.

Mais propriamente, uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω e matriz de transição P é uma sequência de v.a. $\{X_n\}_{n \geq 1}$ com a propriedade de Markov, ou seja, cuja probabilidade de transição para o estado seguinte depende somente do estado corrente e não dos estados anteriores:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = x_n) = P(x_n, x)$$

se ambas as condições estiverem bem definidas, ou seja, se $\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_{n+1} = x_{n+1}) > 0$

Cadeias de Markov

Definição 2: Matriz Estocástica

Seja P uma matriz $n \times n$. Dizemos que P é estocástica se todas as suas entradas são não-negativas e $\sum_{y=1}^{n} P(x, y) = 1, \;\; \forall x \in \{1, ..., n\}$.

Observação

Se (X_t) é uma cadeia de Markov, a sua matriz de transição é uma matriz estocástica.

Falência do Jogador

Problema da Falência do Jogador (Gambler's Ruin)

Um jogador aposta no resultado de uma sequência independente de lançamentos de moedas honestas (*fair coins*).
Se sair coroa, o jogador recebe 1\$, se sair cara, o jogador perde 1\$.
Se o jogador chegar a uma fortuna de n\$, então parará de jogar. Se ficar sem dinheiro também parará de jogar.
Quanto tempo demorará o jogador a chegar a uma destas possibilidades e quais as probabilidades das mesmas?

Falência do Jogador

Proposição 1

Considere-se um jogador que faz apostas no resultado do lançamento de moedas justas. Este abandona o jogo se a sua fortuna for 0\$ ou se subir para n\$.
Seja X_t a fortuna do do jogador no tempo t e seja τ o tempo necessário para que se chegar à fortuna de 0\$ ou n\$.
Assuma-se que $X_0 = k$, $0 \leq k \leq n$.
Então,

$$\mathbb{P}_k(X_\tau = n) = \frac{k}{n}$$

$$\mathbb{E}_k(\tau) = k(n-k)$$

Colecionar Cupões

Problema do Colecionador de Cupões

Um colecionador deseja obter um conjunto completo dos n tipos diferentes de cupões emitidos por uma empresa. Supõe-se que cada cupão que ele adquire é igualmente provável de ser de cada um dos n tipos. Quantos cupões o colecionador tem de obter para que a sua coleção contenha todos os n tipos?

Vamos ver que este problema é uma cadeia de Markov. Seja X_t o número de tipos diferentes presentes nos primeiros t cupões. Tem-se $X_0 = 0$. Quando o colecionador tem k tipos diferentes, faltam-lhe $n - k$ tipos. Assim,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = k + 1 | X_t = k) = \frac{n-k}{n} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X_{t+1} = k | X_t = k) = \frac{k}{n}$$

Colecionar Cupões

Nesta cadeia qualquer trajetória é não decrescente. Interessa-nos o número de passos necessários para se atingir o estado de absorção, ou seja, o estado n (coleção completa).

Proposição 2

Considere-se um colecionador que procura obter um conjunto completo de cupões. Suponha-se que cada novo cupão é escolhido de forma uniforme e independente do conjunto de n possíveis tipos. Seja, ainda, τ o número de cupões colecionados quando, pela primeira vez, o conjunto contém todos os tipos. Então,

$$\mathbb{E}(\tau) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Colecionar Cupões

Definição 3: Estado de Absorção

Um estado $x \in \Omega$ diz-se de absorção se a cadeia nunca deixa x, após ter visitado este estado pela primeira vez.

A seguinte proposição afirma que é improvável que τ seja muito maior que o seu valor esperado.

Proposição 3

Seja τ uma variável aleatória de colecionador de cupões como descrito na Proposição 2. Para qualquer $c > 0$,

$$\mathbb{P}(\tau > \lceil n \log(n) + cn \rceil) \leqslant e^{-c}.$$

Nota: $|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)| \leqslant 1 \Rightarrow |\mathbb{E}(\tau) - n \log(n)| \leqslant n$

Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest

Definição 4: Passeio aleatório simples (uni-dimensional)

Seja (X_t) é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega = \mathbb{Z}$ e com matriz de transição $P(i, i+1) = p = 1 - P(i, i-1)$ para algum $i \in \Omega$ e $0 < p < 1$. Nessas condições, diz-se que (X_t) é um passeio aleatório simples (uni-dimensional). A definição pode ser generalizada para dimensões superiores.

Definição 5: Hipercubo de dimensão n

O hipercubo de dimensão n é um grafo cujos vértices são os n-tuplos da forma $\{0, 1\}^n$, e dois vértices estão ligados por uma aresta se diferem exatamente numa coordenada.

Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest

Assim, um passeio aleatório simples num hipercubo decorre da seguinte forma:

- Seja $(x^1, x^2, ..., x^n)$;
- É escolhida aleatoriamente uma coordenada $j \in \{1, ..., n\}$;
- Transição do vértice $(x^1, x^2, ..., x^j, ..., x^n)$ para o vértice $(x^1, x^2, ..., 1 - x^j, ..., x^n)$
- Retorna ao passo 2.

Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest

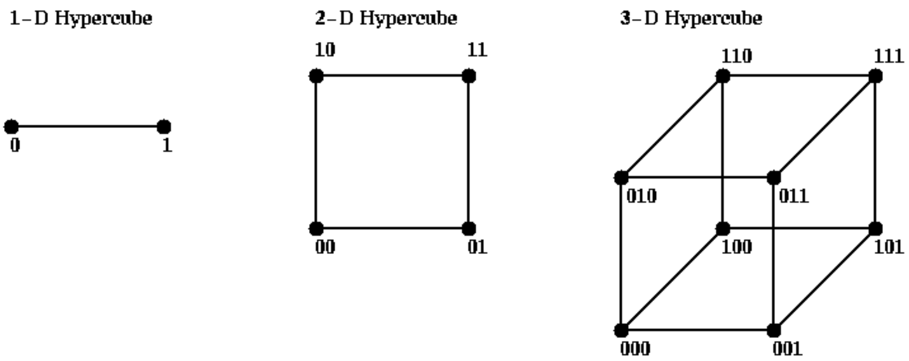


Figure 1: Hipercubos de dimensões 1, 2 e 3

Exemplo 1: Partícula material

Dada uma partícula material, um passeio aleatório simples dessa partícula no hipercubo é periódico. Por outro lado, se a partícula transita de estado com probabilidade $\frac{1}{2}$ (como anteriormente) ou mantém-se na mesma posição com probabilidade $\frac{1}{2}$ (passeio aleatório preguiçoso), isso já não ocorre.

Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest

Definição 6: Distribuição estacionária

Seja (X_t) uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega = \{1, ..., n\}$, matriz de transição P e π uma distribuição de probabilidade em Ω, $\pi = (\pi_0, ..., \pi_n)$. Diz-se que π é a distribuição estacionária de (X_t) em Ω sse $\pi P = \pi$.

Definição 7: Irredutibilidade

Uma cadeia de Markov com matriz de transição P diz-se irredutível se para quaisquer dois estados $x, y \in \Omega$ existe um inteiro t tal que $P^t(x, y) > 0$. Ou seja, é possível chegar a um qualquer estado partindo de outro qualquer estado usando apenas transições de probabilidade positiva.

Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest

Modelo da Urna de Ehrenfest

Suponhamos que se distribui n bolas por duas urnas, I e II. Em cada passo, é retirada uma bola aleatoriamente de uma urna e é transferida para a outra urna. Seja X_t o número de bolas na urna I no instante t.

- (X_t) é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega = \{1, ..., n\}$ com transições de $+1$ ou -1 em cada passo;
- (X_t) tem matriz de transição $P(j,k) = \begin{cases} \frac{n-j}{n} & , \quad k = j+1 \\ \frac{j}{n} & , \quad k = j-1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$
- (X_t) tem distribuição estacionária binomial de parâmetros n e $\frac{1}{2}$;

Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest

Seja (X_t) uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω, matriz de transição P e uma relação de equivalência que particione Ω. Em que circunstâncias será $([X_t])$ uma cadeia de Markov?

Lema 1

Seja Ω o espaço de estados de uma cadeia de Markov (X_t) com matriz de transição P e $\sim$ uma relação de equivalência em Ω com classes de equivalência $\Omega^\sharp = \{[x] : x \in \Omega\}$. Assuma-se que P satisfaz $P(x, [y]) = P(x', [y])$ se $x \sim x'$.
Então, $([X_t])$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega^\sharp$ e com matriz de transição $P^\sharp$ definida por $P^\sharp([x], [y]) := P(x, [y])$

Ao processo de construir uma nova cadeia de Markov tomando classes de equivalência chama-se *projeção*.

Hipercubo de dimensão n e Modelo da Urna de Ehrenfest

Definição 8: Peso de Hamming

Seja $x := (x^1, ..., x^n) \in \{0, 1\}^n$. O peso de Hamming de x, $W(x)$, corresponde ao número de coordenadas de x iguais a 1.

Exemplo 2

O passeio aleatório num hipercubo pode ser especificado pelo conjunto de bolas na urna I do modelo de Ehrenfest, onde a transição de um vértice para outro no hipercubo pode ser vista como uma extração ou reposição de uma bola na urna I. Ou seja, o Modelo de Ehrenfest é uma *projeção* do passeio aleatório simples no hipercubo.

Nota: Dois vértices do hipercubo dizem-se equivalentes se possuem o mesmo número de coordenadas iguais a 1.

Modelo da Urna de Pólya

Urna de Pólya

Começa-se com uma urna que contém duas bolas, uma preta e uma branca. Seguidamente, procede-se escolhendo aleatoriamente uma bola de entre as que já se encontram na urna; repõe-se essa bola na urna e adiciona-se uma nova bola da mesma cor da que foi escolhida.

A sequência de pares ordenados que listam o número de bolas pretas e brancas é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{1, 2, ...\}^2$.

Modelo da Urna de Pólya

Seja B_k o número de bolas pretas na urna de Pólya após a adição de k bolas. Assim, tem-se,

$$\mathbb{P}(B_{k+1} = j + 1 | B_k = j) = \frac{j}{k+2}$$

Lema 2

A distribuição de B_k é uniforme em $\{1, 2, ..., k+1\}$.

Cadeias de Nascimento e Morte

Cadeia de Nascimento e Morte

Considere-se (X_t) uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ e com as seguintes caraterísticas:

- As probabilidades de transição podem ser especificadas por $\{(p_k, r_k, q_k)\}_{0 \leq k \leq n}$, onde $p_k + r_k + q_k = 1$ para cada k e:
  - p_k é a probabilidade de transição de estado k para $k+1$ quando $0 \leq k < n$,
  - q_k é a probabilidade de transição de estado k para $k-1$ quando $0 < k \leq n$,
  - r_k é a probabilidade de permanência no mesmo estado k quando $0 \leq k \leq n$,
  - $q_0 = p_n = 0$

Chama-se a (X_t) uma cadeia de Markov de nascimento e morte.

Cadeias de Nascimento e Morte

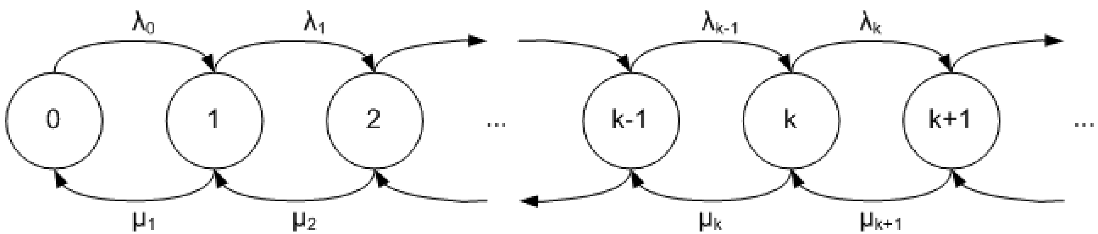


Figure 2: Cadeia de nascimento e morte

Observação

- Em cada passo, ocorre no máximo um nascimento ou morte.

Cadeias de Nascimento e Morte

Definição 9: Reversibilidade

Seja (X_t) uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega = \{1, ..., n\}$ e matriz de transição P. (X_t) diz-se reversível se satisfaz as *condições de balanço detalhado*, ou seja, se existir uma distribuição de probabilidade π sobre Ω tal que:

$$\pi(i)P(i,j) = \pi(j)P(j,i), \ \ \forall i,j \in \Omega.$$

Ou seja, $\pi(i) = \sum_{j\in\Omega} \pi(j)P(i,j), \ \ \forall i,j \in \Omega.$.

Cadeias de Nascimento e Morte

Proposição 4

Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov com espaço de estados Ω. Qualquer distribuição de probabilidade π em Ω satisfazendo as *condições de balanço detalhado* é estacionária para P.

Proposição 5

Qualquer cadeia de nascimento e morte é reversível.

Passeios Aleatórios em Grupos

Definição 10: Grupo

Um grupo é um conjunto G que tem uma operação associativa $\circ : G \times G \to G$ e uma identidade $id \in G$ tal que $\forall g \in G$:

- $id \circ g = g$ e $g \circ id = g$
- existe sempre um inverso $g^{-1} \in G$, ou seja, verifica-se que $g^{-1} \circ g = id$ e $g \circ g^{-1} = id$

Passeios Aleatórios em Grupos

Definição 11: Passeio aleatório num grupo G com distribuição incremento μ

Dada uma distribuição de probabilidade μ num grupo $(G, \circ)$, define-se um passeio aleatório em G com distribuição incremento μ como se segue:
É uma cadeia de Markov com espaço de estados G e transita de estado ao se multiplicar o estado atual "à esquerda" por um elemento aleatório de G selecionado por μ.

Equivalentemente, a matriz de transição P desta cadeia tem entradas $P(g, hg) = \mu(h)$, $\forall g, h \in G$.

Passeios Aleatórios em Grupos

Exemplo 3: n-ciclo

- Seja μ a distribuição que atribui a probabilidade $\frac{1}{2}$ a 1 e $n-1 \equiv -1 \pmod{n}$ no grupo aditivo cíclico $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
  O passeio aleatório simples no n-ciclo é o passeio aleatório em $\mathbb{Z}_n$ com distribuição incremento μ.
- Seja λ a distribuição que atribui a probabilidade $\frac{1}{4}$ a 1 e $n-1 \equiv -1 \pmod{n}$ e probabilidade $\frac{1}{2}$ a 0.
  O passeio aleatório preguiçoso no n-ciclo é o passeio aleatório em $\mathbb{Z}_n$ com distribuição incremento λ.

Passeios Aleatórios em Grupos

Exemplo 4: hipercubo

- O passeio aleatório simples no hipercubo, a distribuição incremento é uniforme no conjunto $\{\vec{e_i} : 1 \leq i \leq n\}$, onde o vetor $\vec{e_i}$ tem a i-ésima coordenada 1 e as restantes 0.
- No passeio aleatório preguiçoso, a distribuição incremento atribui ao vetor $\vec{0}$ (vetor com as entradas todas 0) a probabilidade $\frac{1}{2}$ e a cada vetor $\vec{e_i}$ a probabilidade $\frac{1}{2n}$.

Passeios Aleatórios em Grupos

Proposição 6

Seja P a matriz de transição de um passeio aleatório num grupo finito G e seja U a distribuição de probabilidade uniforme em G. Então, U é uma distribuição estacionária para P.

Gerar conjuntos, irredutibilidade, grafos de Cayley, e reversibilidade

Definição 12: Conjunto Gerador de Grupo

Sejam G um grupo e H um conjunto tal que $H \subset G$. Seja, ainda, $\langle H \rangle$ o grupo mais pequeno que contém todos os elementos de H (qualquer elemento de $\langle H \rangle$ pode ser escrito como um produto dos elementos de H e dos seus inversos). Assim, H diz-se gerador de G se $\langle H \rangle = G$.

Proposição 7

Seja μ uma distribuição de probabilidade num grupo finito G. O passeio aleatório em G com distribuição de incremento μ é irredutível se e só se $S = \{g \in G : \mu(g) > 0\}$ é gerador de G.

Gerar conjuntos, irredutibilidade, grafos de Cayley, e reversibilidade

Definição 13: Grafo Orientado de Cayley

Seja S um conjunto gerador dum grupo finito G. O grafo orientado de Cayley associado a S e G é o grafo orientado com conjunto de vértices G no qual (v, w) é uma aresta sse $v = sw$, onde $s \in S$.

Definição 14: Simetria

Um conjunto S de geradores de um grupo G diz-se simétrico se $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$. Uma distribuição de probabilidade μ num grupo G diz-se simétrica se $\mu(g) = \mu(g^{-1}), \quad \forall g \in G$.

Gerar conjuntos, irredutibilidade, grafos de Cayley, e reversibilidade

- Quando S é simétrico, todas as arestas no grafo orientado de Cayley são bidirecionais. Ou seja, pode ser visto como um grafo normal.
- Quando G é finito e S é um conjunto simétrico que gera G, o passeio aleatório simples no grafo de Cayley correspondente é o mesmo que o passeio aleatório em G com distribuição de incremento μ sendo a distribuição uniforme em S.

Proposição 8

O passeio aleatório num grupo finito G com distribuição de incremento μ é reversível se e só se μ é simétrica.

Cadeias de Markov Transitivas

Definição 15: Transitividade

Seja (X_t) uma cadeia de Markov com espaço de estados $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ e matriz de transição P. (X_t) diz-se transitiva se, para cada $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, existe uma bijeção $\varphi = \varphi_{(x,y)} : \Omega \to \Omega$ tal que:

- $\varphi(x) = y$, e
- $P(z, w) = P(\varphi(z), \varphi(w)), \ \forall z, w \in \Omega$.

Isso significa, de forma mais simples, que a cadeia "parece a mesma" vista de qualquer estado em Ω.

Exemplo 5

Qualquer passeio aleatório num grupo é transitivo.

Cadeias de Markov Transitivas

Proposição 9

Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov transitiva com espaço de estados Ω. Então, a distribuição uniforme em Ω é estacionária para P.

Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$ e Princípio da Reflexão

Definição 16: Passeio aleatório do vizinho mais próximo $\mathbb{Z}$

Se (Δ_t) é uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas que tomam valores em $\{-1, 0, 1\}$ e $X_t = \sum_{s=1}^{t} \Delta_s$ então a sequência (X_t) é um passeio aleatório do vizinho mais próximo com incrementos (Δ_t).
Esta sequência de variáveis aleatórias é uma cadeia de Markov com espaço de estados infinito e a matriz de transição P tem as seguintes entradas:

- $P(k, k+1) = p$
- $P(k, k) = r$
- $P(k, k-1) = q$

onde $p + q + r = 1$.

Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$ e Princípio da Reflexão

Exemplo 6

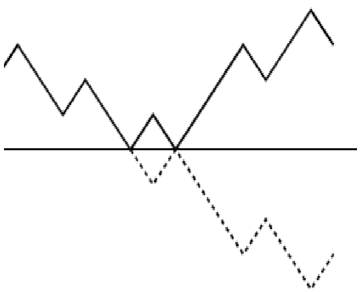
- $p = q = \frac{1}{2}$ e $r = 0 \Rightarrow$ passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$
- $p = q = \frac{1}{4}$ e $r = \frac{1}{2} \Rightarrow$ passeio aleatório preguiçoso em $\mathbb{Z}$

Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$ e Princípio da Reflexão

Lema 3: Princípio da Reflexão

Seja (X_t) o passeio aleatório simples ou o passeio aleatório preguiçoso em $\mathbb{Z}$. Então, para $\forall j, k, r \in \mathbb{Z}^+$:

- $\mathbb{P}_k(\tau_0 < r, X_r = j) = \mathbb{P}_k(X_r = -j)$
- $\mathbb{P}_k(\tau_0 < r, X_r > 0) = \mathbb{P}_k(X_r < 0)$



Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$ e Princípio da Reflexão

Exemplo 7: Aplicação do lema

O lema anterior indica-nos uma distribuição de τ_0 para o passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ quando este começa em 1.

Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}$ e Princípio da Reflexão

Lema 4

Se (X_t) é um passeio aleatório simples ou um passeio aleatório preguiçoso em $\mathbb{Z}$, então $P_k(\tau_0 > r) = P_0(-k < X_r \leq k), \ \ \forall k > 0$.

Lema 5

Se (X_t) é um passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$, então $P_0(X_t = k) \leq \frac{3}{\sqrt{t}}$.

Teorema

Se (X_t) é um passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ então $P_k(\tau_0 > r) \leq \frac{12k}{\sqrt{r}}, \ \ \forall k, r \in \mathbb{Z}^+$.

Referências

Levin, D.A.; Peres, Y.; Wilmer, E.L.; *Markov Chains and Mixing Times*, AMS (2009)